

## Übung zur Vorlesung

**Numerik II**

SS 2025 — Blatt 3

**Aufgabe 1**

(4 Punkte)

Verwenden Sie das Neville-Schema, um

(a) das Interpolationspolynom  $p \in \mathcal{P}_3$ , welches durch die Stützpunkte  $(x_i, y_i)$ 

|       |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|
| $x_i$ | 0  | 2  | 3  | 4  |
| $y_i$ | 10 | -2 | -2 | -6 |

für  $i = 0, \dots, 3$  gegeben ist, an der Stelle  $x = 5$  auszuwerten.(b) das Interpolationspolynom  $p \in \mathcal{P}_4$ , welches sich durch Hinzufügen des Stützpunktes  $(x_4, y_4) = (6, 10)$  ergibt, an der Stelle  $x = 5$  auszuwerten.**Aufgabe 2**

(6 Punkte)

(a) Seien  $0 \leq a < b$  und  $x \mapsto g(x)$  die lineare Funktion, die die Funktion  $f(x) = x^{1/2}$  an den Stützstellen  $a$  und  $b$  interpoliert. Zeigen Sie, dass für den Fehler

$$e = \max_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)|$$

die Abschätzungen  $e \leq (b-a)^2 a^{-3/2}/8$  für  $a > 0$  und  $e \leq b^{1/2}/4$  für  $a = 0$  gelten.(b) Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_i = i/n$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , sei  $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$  die interpolierende Spline-Funktion von  $f(x) = x^{1/2}$  im Intervall  $[0, 1]$ . Zeigen Sie die Abschätzung

$$\max_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq n^{-1/2}/4.$$

(c) In welchen Bereichen ist die Fehlerabschätzung suboptimal?

**Aufgabe 3**

(4 Punkte)

Bestimmen Sie explizit die interpolierenden kubischen Splines mit natürlichen sowie Hermite-Randbedingungen  $s'(-1) = 0$ ,  $s'(1) = 3$ , für die Stützstellen  $x_i = -1 + i/2$  und Stützwerte  $y_i = (-1)^i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 4$ , und zeichnen Sie diese.**Aufgabe 4**

(6 Punkte)

Es sei  $\mathcal{T}_n$  eine Partitionierung des Intervalls  $[a, b]$  und es seien  $s \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$  und  $g \in C^1([a, b])$ , sodass  $s(x_i) = g(x_i)$  für  $i = 0, 1, \dots, n$  gilt. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |s'|^2 dx \leq \int_a^b |g'|^2 dx.$$

**Abgabe:** Mittwoch, 4.6., 14:00 Uhr (in den Briefkästen im Rechenzentrum).