

Übung zur Vorlesung

Numerik II

SS 2025 — Blatt 3

Dies sind Lösungsskizzen. Falls Sie Fehler finden sollten, geben Sie uns gerne Bescheid.

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Verwenden Sie das Neville-Schema, um

(a) das Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_3$, welches durch die Stützpunkte (x_i, y_i)

x_i	0	2	3	4
y_i	10	-2	-2	-6

für $i = 0, \dots, 3$ gegeben ist, an der Stelle $x = 5$ auszuwerten.

(b) das Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_4$, welches sich durch Hinzufügen des Stützpunktes $(x_4, y_4) = (6, 10)$ ergibt, an der Stelle $x = 5$ auszuwerten.

Lösung:

Das Neville-Schema wird im Buch beschrieben (Numerik 3x9, Kapitel 11.3, insbesondere Definition 11.3, Satz 11.3, Abb. 11.3 und Abb. 11.4). Wir berechnen die Polynome $p_{i,j}$ für $j \in \{0, \dots, n\}$ und $i \in \{0, \dots, n-j\}$ mit der Rekursionsformel aus Satz 11.3. Dabei ist $p_{i,j}$ das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad j mit $p_{i,j}(x_k) = y_k$ für $k \in \{i, \dots, i+j\}$. Zwei zentrale Beispiele:

- Für $j = 0$ ist $p_{i,0} = y_i$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$, also ein konstantes Polynom. Diese $n+1$ Polynome bilden den Start des Neville-Schemas.
- Für $j = n$ ist $p_{0,n} = p$ das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom mit $p_{0,n}(x_k) = p(x_k) = y_k$ für $k \in \{0, \dots, n\}$, also das gewünschte Endergebnis des Neville-Schemas.

Teil (a): Das iterative Neville-Schema nach Satz 11.3 und Abb. 11.4 ergibt (nur Zwischenergebnisse, nicht die detaillierten Rechnungen):

$$\begin{aligned} \underline{j = 0 :} \quad & p_{0,0}(x) = 10 \\ & p_{1,0}(x) = -2 \\ & p_{2,0}(x) = -2 \\ & p_{3,0}(x) = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{j = 1 :} \quad & p_{0,1}(x) = -6x + 10 \\ & p_{1,1}(x) = -2 \\ & p_{2,1}(x) = -4x + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{j = 2 :} \quad & p_{0,2}(x) = 2x^2 - 10x + 10 \\ & p_{1,2}(x) = -2x^2 + 10x - 14 \end{aligned}$$

$$\underline{j = 3 :} \quad p_{0,3}(x) = -x^3 + 7x^2 - 16x + 10 = p_{(a)}(x)$$

Auswerten an der Stelle $x = 5$ ergibt also $p(5) = -20$. (Falls nur der Wert des Polynoms an einer einzigen Stelle gesucht ist, kann bereits in jedem Zwischenschritt $x = 5$ eingesetzt werden.)

Teil (b): Nach demselben Schema wie in Teil (a) berechnen wir die neuen Polynome mit der zusätzlichen Stützstelle $(x_4, y_4) = (6, 10)$ (eine Visualisierung mit Abb. 11.4 ist kann hilfreich sein):

$$p_{4,0}(x) = 10$$

$$p_{3,1}(x) = 8x - 38$$

$$p_{2,2}(x) = 4x^2 - 32x + 58$$

$$p_{1,3}(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{31}{2}x^2 + 49x - 50$$

$$p_{0,4}(x) = \frac{5}{12}x^4 - \frac{19}{4}x^3 + \frac{107}{6}x^2 - 26x + 10 = p_{(b)}(x)$$

Auswerten an der Stelle $x = 5$ ergibt dann $p_{0,4}(5) = -\frac{15}{2}$.

Aufgabe 2

(6 Punkte)

(a) Seien $0 \leq a < b$ und $x \mapsto g(x)$ die lineare Funktion, die die Funktion $f(x) = x^{1/2}$ an den Stützstellen a und b interpoliert. Zeigen Sie, dass für den Fehler

$$e = \max_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)|$$

die Abschätzungen $e \leq (b-a)^2 a^{-3/2}/8$ für $a > 0$ und $e \leq b^{1/2}/4$ für $a = 0$ gelten.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \dots, n$, sei $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ die interpolierende Spline-Funktion von $f(x) = x^{1/2}$ im Intervall $[0, 1]$. Zeigen Sie die Abschätzung

$$\max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq n^{-1/2}/4.$$

(c) In welchen Bereichen ist die Fehlerabschätzung suboptimal?

Lösung:

Teil (a): Für die lineare Interpolation zwischen den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ erhalten wir

$$g(x) = f(a) + (x-a) \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = a^{1/2} + (x-a) \frac{b^{1/2} - a^{1/2}}{b-a} = \frac{a^{1/2}b^{1/2} + x}{a^{1/2} + b^{1/2}}.$$

Schritt 1: Zunächst beobachten wir, dass die Wurzelfunktion konkav ist, also $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. Daraus folgt insbesondere, dass die Funktion

$$|g(x) - f(x)| = f(x) - g(x)$$

ebenfalls konkav ist. Um das Maximum von $|g(x) - f(x)|$ zu berechnen, suchen wir Nullstellen der Ableitung

$$\frac{d}{dx} |g(x) - f(x)| = \frac{d}{dx} (f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x).$$

Schritt 2: Wir suchen nun ein $\hat{x} \in [a, b]$, sodass $g'(\hat{x}) = f'(\hat{x})$, also

$$\frac{1}{a^{1/2} + b^{1/2}} = \frac{1}{2} \hat{x}^{-1/2} \quad \Leftrightarrow \quad a^{1/2} + b^{1/2} = 2\hat{x}^{1/2} = 2f(\hat{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{x} = \frac{(a^{1/2} + b^{1/2})^2}{4}.$$

Wegen der Konkavität von $|g(x) - f(x)| = f(x) - g(x)$ ist $\hat{x}$ das eindeutige Maximum von $|g(x) - f(x)|$ auf dem Intervall $[a, b]$ und es folgt

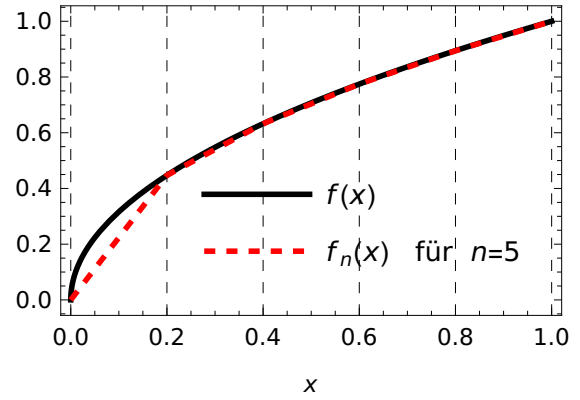
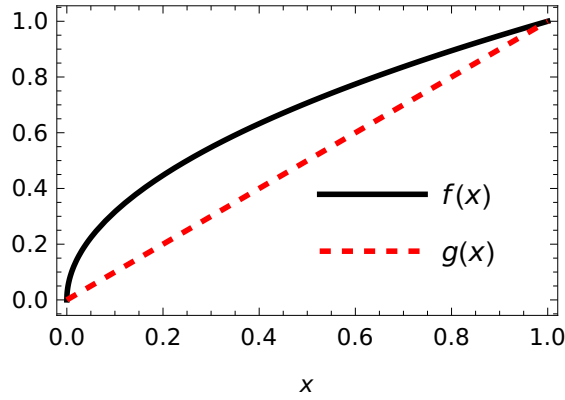
$$\begin{aligned} e = f(\hat{x}) - g(\hat{x}) &= \frac{a^{1/2} + b^{1/2}}{2} - \left(\frac{a^{1/2}b^{1/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}} + \frac{a^{1/2} + b^{1/2}}{4} \right) \\ &= \frac{a + 2a^{1/2}b^{1/2} + b - 4a^{1/2}b^{1/2}}{4(a^{1/2} + b^{1/2})} = \frac{a - 2a^{1/2}b^{1/2} + b}{4(a^{1/2} + b^{1/2})}. \end{aligned}$$

Schritt 3: Nun müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

- $a \neq 0$: In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} e = f(\hat{x}) - g(\hat{x}) &= \frac{a - 2a^{1/2}b^{1/2} + b}{4(a^{1/2} + b^{1/2})} = \frac{1}{4} \frac{(a^{1/2} - b^{1/2})^2 (a^{1/2} + b^{1/2})^2}{(a^{1/2} + b^{1/2})^3} \\ &\leq \frac{(a-b)^2}{(2a^{1/2})^3} = \frac{(a-b)^2}{8a^{3/2}}, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt für die Ungleichung die dritte binomische Formel und zusätzlich $b \geq a$ verwenden.



- $a \neq 0$: Hier folgt

$$e = f(\hat{x}) - g(\hat{x}) = \frac{a - 2a^{1/2}b^{1/2} + b}{4(a^{1/2} + b^{1/2})} = \frac{b}{4b^{1/2}} = \frac{b^{1/2}}{4}.$$

Teil (b): Hier ist die zentrale Beobachtung, dass die interpolierende Spline-Funktion $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ durch die Funktion g aus Teil (a) gegeben ist. Daher können wir das obige Ergebnis verwenden.

- $i = 1$: Auf dem ersten Teilintervall verwenden wir die Abschätzung aus (a) für den Fall $a = 0$:

$$e_1 \leq \frac{x_1^{1/2}}{4} = \frac{1}{4n^{1/2}}.$$

- $i \geq 1$: Auf allen anderen $n - 1$ Teilintervallen verwenden wir den Fall $a \neq 0$ aus (a):

$$e_i \leq (x_i - x_{i-1})^2 x_i^{-3/2} / 8 \leq (x_i - x_{i-1})^2 x_1^{-3/2} / 8 \leq \frac{1}{8n^{1/2}}, \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}.$$

Also gilt insgesamt

$$\max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} e_i \leq \frac{1}{4n^{1/2}}.$$

Teil (c): In unserer Rechnung haben wir zunächst mit Abschätzungen auf den einzelnen Teilintervallen gearbeitet. Diese individuellen Abschätzungen waren besser auf den Intervallen $[x_{i-1}, x_i]$, für $i \geq 2$, als auf dem Intervall $[x_0, x_1]$ (siehe unterschiedliche obere Schranken in der Fallunterscheidung in Teil (b)). Daher kann die finale Abschätzung nur in dem Bereich $[0, 1/n]$ optimal sein; in allen anderen Bereichen ist sie suboptimal.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Bestimmen Sie explizit die interpolierenden kubischen Splines mit natürlichen sowie Hermite-Randbedingungen $s'(-1) = 0$, $s'(1) = 3$, für die Stützstellen $x_i = -1 + i/2$ und Stützwerte $y_i = (-1)^i$, $i = 0, 1, 2, \dots, 4$, und zeichnen Sie diese.

Lösung:

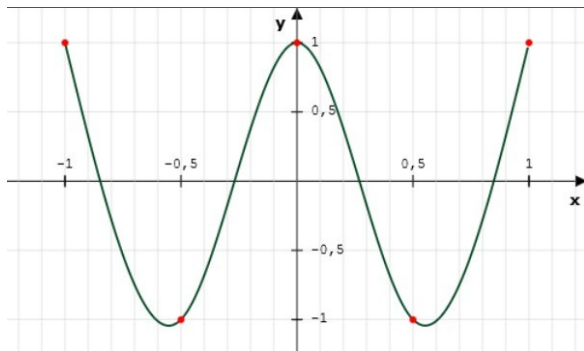
- Wir verwenden Satz 12.5 sowie die in Beispiel 12.1 eingeführte, kompaktere Matrixschreibweise (Numerik 3x9, Kapitel 12.3).
- Für n Teilintervalle mit $n + 1$ Stützstellen liefert Satz 12.5 $n - 1$ Bedingungen für die Größen γ_i , mit $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Dabei sind die γ_i die zweiten Ableitungen der Lösung an den Stützstellen,

$$\gamma_i = s''(x_i).$$

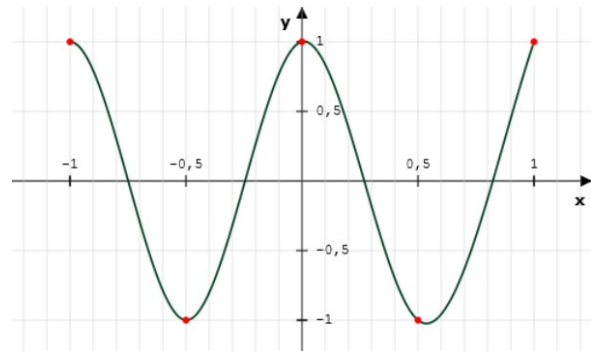
- Zusätzlich benötigen wir zwei Randbedingungen (natürliche Randbedingungen oder Hermite-Randbedingungen, je nach Aufgabenteil).
- Aus den γ_i für $i \in \{0, \dots, n\}$ werden dann die Darstellungen der Lösung s als Polynome auf den einzelnen Teilintervallen berechnet.
- Als Stützstellen und Stützwerte sind in der Aufgabe

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline y_i & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

gegeben, somit ist $n = 4$ und es gilt $h_i = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{2}$ für $i \in \{0, \dots, n - 1\}$.



natürliche Randbedingungen



Hermite-Randbedingungen

Natürliche Randbedingungen: Hier nehmen wir an, dass die Krümmung der Spline-Funktion an den Randpunkten verschwindet, also $s''(-1) = s''(1) = 0$. Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem (siehe Beispiel 12.1):

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten die Lösung $\gamma_1 = \frac{240}{7}$, $\gamma_2 = \frac{-288}{7}$, $\gamma_3 = \frac{240}{7}$, und durch die natürlichen Randbedingungen sind $\gamma_0 = \gamma_4 = 0$ gegeben. Dadurch erhalten wir folgende interpolierende kubische Splines:

$$s|_{[-1, -0.5]}(x) = \frac{80}{7}(x - x_0)^3 - \frac{48}{7}(x - x_0) + 1 = \frac{80}{7}x^3 + \frac{240}{7}x^2 + \frac{192}{7}x + \frac{39}{7}$$

$$s|_{[-0.5, 0]}(x) = -\frac{176}{7}(x - x_1)^3 + \frac{120}{7}(x - x_1)^2 + \frac{12}{7}(x - x_1) - 1 = -\frac{176}{7}x^3 - \frac{144}{7}x^2 + 1$$

$$s|_{[0, 0.5]}(x) = \frac{176}{7}(x - x_2)^3 - \frac{144}{7}(x - x_2)^2 + 1 = \frac{176}{7}x^3 - \frac{144}{7}x^2 + 1$$

$$s|_{[0.5, 1]}(x) = -\frac{80}{7}(x - x_3)^3 + \frac{120}{7}(x - x_3)^2 - \frac{12}{7}(x - x_3) - 1 = -\frac{80}{7}x^3 + \frac{240}{7}x^2 - \frac{192}{7}x + \frac{39}{7}$$

Hermite-Randbedingungen: Mit den Hermite-Randbedingungen $s'(-1) = 0$ und $s'(1) = 3$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \\ -16 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten die Lösung $\gamma_0 = -\frac{667}{14}, \gamma_1 = \frac{331}{7}, \gamma_2 = -\frac{91}{2}, \gamma_3 = \frac{271}{7}, \gamma_4 = -\frac{187}{14}$ und damit folgende interpolierende kubische Splines:

$$\begin{aligned} s|_{[-1,-0.5]}(x) &= \frac{443}{14}(x-x_0)^3 - \frac{667}{28}(x-x_0)^2 + 1 = \frac{443}{14}x^3 + \frac{1991}{28}x^2 + \frac{331}{7}x + \frac{247}{28} \\ s|_{[-0.5,0]}(x) &= -\frac{443}{14}(x-x_1)^3 + \frac{331}{14}(x-x_1)^2 - \frac{5}{56}(x-x_1) - 1 = -\frac{433}{14}x^3 - \frac{91}{4}x^2 + \frac{5}{14}x + 1 \\ s|_{[0,0.5]}(x) &= \frac{393}{14}(x-x_2)^3 - \frac{91}{4}(x-x_2)^2 + \frac{5}{14}(x-x_2) + 1 = \frac{393}{14}x^3 - \frac{91}{4}x^2 + \frac{5}{14}x + 1 \\ s|_{[0.5,1]}(x) &= -\frac{243}{14}(x-x_3)^3 + \frac{271}{14}(x-x_3)^2 - \frac{75}{56}(x-x_3) - 1 = -\frac{243}{14}x^3 + \frac{1271}{28}x^2 - \frac{236}{7}x + \frac{187}{28} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(6 Punkte)

Es sei $\mathcal{T}_n$ eine Partitionierung des Intervalls $[a, b]$ und es seien $s \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ und $g \in C^1([a, b])$, sodass $s(x_i) = g(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, n$ gilt. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |s'|^2 dx \leq \int_a^b |g'|^2 dx.$$

Lösung:

Die Argumentation in dieser Aufgabe folgt der vom Beweis von Satz 12.3.

Schritt 1: Wir können das Integral bzw. den Integranden wie folgt umschreiben:

$$\int_a^b |g'|^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'|^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[|s'|^2 + |g' - s'|^2 + 2s'(g' - s') \right] dx.$$

Das rechnet man am leichtesten nach, indem man die rechte Seite komplett ausmultipliziert.

Schritt 2: Wir wollen nun zeigen, dass das Integral über den letzten Term verschwindet. Dazu verwenden wir, dass die Ableitung s' konstant auf jedem Teilintervall ist. Um die Notation zu vereinfachen, bezeichnen wir die Ableitung auf dem i -ten Teilintervall mit

$$s'|_{[x_{i-1}, x_i]} = a_i.$$

Die Behauptung folgt mit dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung:

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} s'(g' - s') dx = \sum_{i=1}^n a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g - s)' dx = \sum_{i=1}^n a_i [g(x) - s(x)]_{x_{i-1}}^{x_i} dx = 0.$$

Die letzte Gleichheit gilt, da g und s in den Interpolationspunkten x_i übereinstimmen.

Schritt 3: Aus den Schritten 1 und 2 folgt nun direkt die Behauptung:

$$\begin{aligned} \int_a^b |g'|^2 dx &\stackrel{1}{=} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[|s'|^2 + |g' - s'|^2 + 2s'(g' - s') \right] dx \\ &\stackrel{2}{=} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[|s'|^2 + |g' - s'|^2 \right] dx \\ &\geq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |s'|^2 dx. \end{aligned}$$