Prof. Dr. Sören Bartels
M.Sc. Vera Jackisch

04.06.2025

Übung zur Vorlesung

Numerik II

SS 2025 — Blatt 4

Aufgabe 1 (Quiz) (10 Punkte)

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Antwort begründen können.

1	Ist $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig und gilt $\|\phi(x)\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $c > 0$, so ist ϕ gut konditioniert.	
2	Die Lagrange-Polynome erfüllen die Identität $\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$ für alle $x \in [a, b]$.	
3	Die Hermite-Interpolationsaufgabe mit vier Stützstellen und Vorgabe der ersten und zweiten Ableitungen an den Stützstellen führt auf 8 Bedingungen.	
4	Jede Spline-Funktion ist einmal stetig differenzierbar.	
5	Die Berechnung eines kubischen Splines führt auf ein lineares Gleichungssystem mit diagonaldominanter, irreduzibler Systemmatrix.	
6	Als komplexer Vektorraum hat $\mathbb{C}^n$ die Dimension n und als reeller Vektorraum die Dimension $2n$.	
7	Ist ω_n die n-te Einheitswurzel, so gilt $\omega_n^{n/2} = -1$ genau dann, wenn n ungerade ist.	
8	Die komplexe trigonometrische Interpolationsaufgabe wird durch $\beta = T_n y$ mit der Fourier-Matrix T_n gelöst.	
9	Die Matrix $S_n = (1/\sqrt{n})T_n$ definiert eine Isometrie auf $\mathbb{C}^n$, das heißt es gilt $\|S_n y\|_2 = \|y\|_2$ für alle $y \in \mathbb{C}^n$.	
10	Für reelle Stützwerte $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ ist die Lösung der komplexen trigonometrischen Interpolationsaufgabe reellwertig.	

Aufgabe 2 (Fourier-Synthese) (5 Punkte)

Berechnen Sie ohne Verwendung von Matrix-Vektor-Multiplikationen die Fourier-Synthese $y = T_8\beta$ des Vektors

$$\beta = [0, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}]^\top.$$

Aufgabe 3 (Fourier-Basis) (3+2 Punkte)

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ilk2\pi/n} = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ Teiler von } l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) Folgern Sie, dass die Fourier-Basis $\{\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{n-1}\}$ mit $\omega^k = (\omega_n^{0k}, \omega_n^{1k}, \ldots, \omega_n^{(n-1)k}) \in \mathbb{C}^n$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, und der n-ten komplexen Einheitswurzel $\omega_n = e^{i2\pi/n}$ die Eigenschaft

$$\omega^k \cdot \omega^l = n\delta_{kl}$$

besitzt.

Abgabe: Mittwoch, 18.06., 14:00 Uhr (in den Briefkästen im Rechenzentrum).