Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. Sören Bartels
M.Sc. Vera Jackisch

02.07.2025

Übung zur Vorlesung

Numerik II

SS 2025 — Blatt 6

Aufgabe 1 (2+2+1 Punkte)
Sei $[a, b] = [1, 2]$ und

$$T(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Die einzige Nullstelle von T in $[a, b]$ ist $x^* = \pi/2$.

(i) Berechnen Sie die Näherung $c_5 = (a_5 + b_5)/2$ an x^* aus dem Bisektionsverfahren.

(ii) Berechnen Sie die Näherung x_3 an x^* aus dem Newtonverfahren mit $x_0 = 1$.

(iii) Vergleichen Sie die absoluten Fehler $|c_5 - x^*|$ und $|x_3 - x^*|$.

Aufgabe 2 (2+2+1 Punkte)
Das Verfahren von Heron approximiert die Quadratwurzel $a^{1/2}$ einer Zahl $a \geq 0$ durch die Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ mit der Funktion $\Phi(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$.

(i) Zeigen Sie, dass Φ eine Kontraktion im Intervall $((\frac{a}{2})^{1/2}, \infty)$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass das Verfahren von Heron mit dem Newton-Verfahren für die Funktion $x \mapsto x^2 - a$ übereinstimmt und untersuchen Sie hinreichende Bedingungen für die lokale, quadratische Konvergenz des Verfahrens.

(iii) Zeigen Sie, dass sich das Verfahren von Heron als Abstiegsverfahren für die Funktion $g(x) = x + \frac{a}{x}$ interpretieren lässt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ konvex, das heißt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in [0, 1]$ gilt $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$, sowie streng monoton wachsend und sei $x^* \in \mathbb{R}$ mit $f(x^*) = 0$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Bestimmen Sie mit dem CG-Verfahren die Lösung von $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 100 & -8 & 0 \\ -8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und dem Startwert } x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Abgabe: Mittwoch, 16.07., 14:00 Uhr (in den Briefkästen im Rechenzentrum).