Numerik (Teil 1)

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 1

Abgabe: Bis Mittwoch, den 11. November 2015, 17 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Für $p > 0$, $\beta > 1$ und $j = 1, 2, 3, 4$ seien die Folgen $(a_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n^{(1)} = n^p, \quad a_n^{(2)} = \beta^n, \quad a_n^{(3)} = n!, \quad a_n^{(4)} = \log_2 n.$$

Für welche Paare $1 \le i, j \le 4$ gilt $a_n^{(i)} = \mathcal{O}(a_n^{(j)})$?

Aufgabe 2. Diskutieren Sie die Konditionierung der Bestimmung von Nullstellen einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sowie die Stabilität ihrer Berechnung mit der pq-Formel $x_{1,2} = -p/2 \pm (p^2/4 - q)^{1/2}$. Betrachten Sie besonders die Fälle $p^2 \approx 4q$ und $p^2 \gg 4|q|$.

Aufgabe 3. Zu fixierten Normen $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ und auf $\mathbb{R}^m$ bezeichne $\|\cdot\|_{op}$ die induzierte Operatornorm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
(i) Die Operatornorm $\|\cdot\|_{op}$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.
(ii) Es gilt

$$\|A\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \inf\{C > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \|Ax\| \le C\|x\|\}$$

und das Supremum und das Infimum werden angenommen.
(iii) Im Fall $A \neq 0$ folgt für $x \in \mathbb{R}^m$ mit $\|x\| \le 1$ und $\|Ax\| = \|A\|_{op}$ bereits $\|x\| = 1$.
(iv) Zeigen Sie, dass die Spektralnorm kleiner ist als jede andere Operatornorm auf dem Raum der Matrizen.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Größenordnung des Aufwands für die Matrix-Vektor-Multiplikation, die Matrix-Matrix-Multiplikation sowie die Bestimmung der Determinante einer Matrix mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

Anwesenheitsaufgabe 1: Sei $\widetilde{\phi} = f \circ g$ ein Verfahren für die mathematische Aufgabe ϕ und sei die durch g definierte Aufgabe schlecht konditioniert. Zeigen Sie, dass das Verfahren $\widetilde{\phi}$ im Allgemeinen instabil ist.

Anwesenheitsaufgabe 2: Wie lassen sich Auslöschungseffekte bei der praktischen Berechnung der Ausdrücke

$$\frac{1-2x}{1+2x} - \frac{1}{1+x}, \qquad \frac{e^x - 1}{x}$$

für $x \neq 0$ mit $|x| \ll 1$ vermeiden?

Anwesenheitsaufgabe 3: Zeigen Sie, dass durch $\|A\|_{\mathcal{G}} = \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$ eine Norm, jedoch keine Operatornorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ definiert wird.

Homepage: `https://portal.uni-freiburg.de/aam/abtlg/ls/lsbartels/lehre/Num1`