Numerik (Teil 1)

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 2

Abgabe: Bis Mittwoch, den 25. November 2015, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Spektralnorm und den Spektralradius der Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und finden Sie eine Vektornorm, deren zugeordnete Matrixnorm kleiner ist als die Spektralnorm, um die Aussage von Aufgabe 3 (iv) auf Blatt 1 zu widerlegen.

Aufgabe 2. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass $\det A \neq 0$ gilt. Bestimmen Sie $\operatorname{cond}_1(A)$, $\operatorname{cond}_2(A)$ und $\operatorname{cond}_\infty(A)$ und diskutieren Sie, für welche Verhältnisse von a, b und c zugehörige lineare Gleichungssysteme schlecht konditioniert sind.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $1 \leq m \leq n$ so, dass die obere linke $m \times m$-Teilmatrix $A_{11} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$ ebenfalls regulär ist. Sei A zerlegt gemäß

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ regulär ist und dass A^{-1} geben ist durch

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1} \\ -S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4. Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Frobeniusnorm definiert durch $\|A\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2$. Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^\top A)}.$$

Folgern Sie, dass die Frobeniusnorm mit der von der euklidischen Norm induzierten Operatornorm verträglich ist in dem Sinne, dass

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_{\mathcal{F}} \leq \sqrt{n}\|A\|_2.$$

Verwenden Sie dazu die Identität $\operatorname{tr}(A^\top A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ mit den nicht-negativen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $A^\top A$. Lassen sich die Abschätzungen auch ohne Verwendung der Eigenwerte beweisen?

Homepage: `https://portal.uni-freiburg.de/aam/abtlg/ls/lsbartels/lehre/Num1`