Numerik (Teil 1)

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 3

Abgabe: Bis Mittwoch, den 9. Dezember 2015, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine strikt diagonaldominante Matrix, das heißt es gelte

$$\sum_{j=1,\dots,n,j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Teilmatrizen $A_k = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ für $k = 1, 2, \dots, n$ ebenfalls strikt diagonaldominant sind.
(ii) Zeigen Sie, dass die Matrix A regulär ist.
Hinweis: Zeigen Sie zum Nachweis von (ii), dass für eine geeignete Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ die Abschätzung $\|Ax\| > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, und folgern Sie daraus, dass A injektiv ist.

Aufgabe 2. (i) Zeigen Sie, dass $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ keine normalisierte LU-Zerlegung und $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ keine Cholesky-Zerlegung besitzt.
(ii) Berechnen Sie die normalisierte LU-Zerlegung von A_1 und die Cholesky-Zerlegung von A_2 mit

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 8 \\ 15 & 11 & 10 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 9 \\ 12 & 41 & 22 \\ 9 & 22 & 38 \end{bmatrix},$$

sofern diese existieren.

Aufgabe 3. Konstruieren Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass die Matrix PA eine normalisierte LU-Zerlegung besitzt, wobei

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ -1 & 10 & -5 & 17 \end{bmatrix}.$$

Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = [17, -23, -13, 51]^\top$.

Aufgabe 4.
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ sowie $x, y \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie die Ableitung der Abbildung

$$t \mapsto \|A(x + ty) - b\|_2^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

und folgern Sie die Gaußsche Normalengleichung $A^\top Ax = A^\top b$, falls x eine Lösung des zugehörigen Ausgleichsproblems ist.

Homepage: `https://portal.uni-freiburg.de/aam/abtlg/ls/lsbartels/lehre/Num1`