

Numerik (Teil 1)

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels

Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 4

Abgabe: Bis Dienstag, den 22. Dezember 2015, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Berechnen Sie mit Hilfe des Householder-Verfahrens eine QR -Zerlegung für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2} & 5/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

und lösen Sie damit die Gleichung $Ax = b$ für $b = [3\sqrt{2}, -1, 7]^\top$.

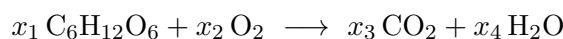
Aufgabe 2. Eine Householder-Matrix $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist für $v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$ definiert durch $P = I_m - 2vv^\top$.

(i) Zeigen Sie, dass $P = P^\top$ und $P^{-1} = P$ gelten.

(ii) Zeigen Sie, dass eine reelle $m \times m$ Householder-Matrix $m - 1$ Eigenwerte mit dem Wert 1 und einen Eigenwert -1 hat.

(iii) Konstruieren Sie mit Hilfe geometrischer Überlegungen für $m = 2, 3$ eine Householder-Matrix, die einen gegebenen Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ auf ein Vielfaches von $e_1 \in \mathbb{R}^m$ abbildet.

Aufgabe 3. Die Verbrennung von Traubenzucker wird durch die chemische Reaktionsgleichung



beschrieben. Dabei ist eine minimale, nicht-triviale, ganzzahlige Lösung $x = [x_1, x_2, \dots, x_4]^\top$ zu bestimmen, so dass dieselbe Anzahl von Atomen jedes beteiligten Stoffes auf der linken und rechten Seite steht. Wie lässt sich das Gaußsche Eliminationsverfahren modifizieren, um eine Lösung zu konstruieren?

Aufgabe 4. Theoretische Überlegungen zu zwei physikalischen Vorgängen führen zu der Annahme, dass die Größen y und t einem Zusammenhang der Form $y(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3$ und die Größen z und v dem Zusammenhang $z(v) = c/v$ genügen. Mit Experimenten werden Messdaten (t_i, y_i) beziehungsweise (v_i, z_i) für $i = 1, 2, \dots, m$ bestimmt. Formulieren Sie Ausgleichsprobleme zur näherungsweise Bestimmung von c_0, c_1, \dots, c_3 beziehungsweise c und stellen Sie die zugehörigen Gaußschen Normalgleichungen auf. Wie lässt sich die Gültigkeit der Vermutung über den Zusammenhang nach Berechnung der Koeffizienten beurteilen?

Homepage: <https://portal.uni-freiburg.de/aam/abtlg/l1s/l1sbartels/lehre/Num1>