Numerik (Teil 1)

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 5

Abgabe: Bis Mittwoch, den 20. Januar 2016, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ der $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

gegeben ist durch $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}^\top .$$

Berechnen Sie A^+ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung sowie mittels der Identität $A^+ = (A^\top A)^{-1}A^\top$. Verwenden Sie A^+, um das durch A und $b = [4, 1, 2, 3]^\top$ definierte Ausgleichsproblem zu lösen.

Aufgabe 3. (Weihnachtsaufgabe) Jedes Jahr an Weihnachten versammeln sich alle Mitglieder der Familie Page, um sich gegenseitig zu beschenken. Dabei wird nicht jeder von jedem bedacht, sodass sich folgendes Bild ergibt:
Vater Larry beschenkt alle drei Kinder (Bill, Steve und Larissa), seine Frau Lucinda und seinen Bruder Sergey. Bill beschenkt Steve, seine Eltern und die Grosseltern Carl und Gloria. Steve beschenkt alle Geschwister, die Mutter und die Grosseltern. Larissa beschenkt die Eltern und Grosseltern. Grossmutter Gloria beschenkt alle Enkelkinder, Grossvater Carl beschenkt seine beiden Söhne und seine Frau. Onkel Sergey beschenkt alle und seine Frau Anne beschenkt ihn und alle Kinder. Lucinda beschenkt alle Kinder und ihre Schwiegereltern.
Bestimmen Sie mithilfe des Google Page Rank-Algorithmus, wer das beliebteste Familienmitglied ist, indem Sie das entsprechende Gleichungssystem aufstellen und lösen.
Erläuterung: Der Page-Rank-Algorithmus gewichtet alle Elemente einer Menge nach ihrer Bedeutung, wobei das jeweilige Gewicht davon abhängt, wie viele Verbindungen das Element mit anderen Elementen besitzt. Je mehr Verbindungen mit grosser Gewichtung, desto grösser ist auch das eigene.
Der Page-Rank des i-ten Elements ergibt sich aus allen mit i verbundenen Elementen als $PR_i = \sum_{j=1}^n \frac{PR_j}{c_j}$, wobei c_j die Anzahl der mit j verbundenen Seiten ist.

Aufgabe 4. (Quiz) Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Antwort begründen können.

Für $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ gilt $\\|A\\|_\infty = 6$ und $\\|A\\|_1 = 9$.	
Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ gilt $\ker AB = \ker A$.	
Besitzt A eine LU-Zerlegung und ist A symmetrisch, so folgt $U = L^\top$.	
Ist A symmetrisch und invertierbar, so ist A positiv definit.	
Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lässt sich die Inverse A^{-1} einer LU-zerlegbaren Matrix A mit dem Aufwand $\mathcal{O}(n^4)$ bestimmen.	
Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, so ist keine Pivotsuche notwendig, um das Gaußsche Eliminationsverfahren durchführen zu können.	
Permutationsmatrizen erhält man durch Zeilenvertauschungen in der Einheitsmatrix.	
Das Ausgleichsproblem besitzt stets eine Lösung.	
Durch $I_n - 2(v^\top v)^{-2} vv^\top$ wird eine Householder-Transformation definiert, sofern $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.	
Ist Q orthogonal, so sind sowohl die Zeilen- als auch die Spaltenvektoren von Q paarweise orthogonal.	

Homepage: `https://portal.uni-freiburg.de/aam/abtlg/ls/lsbartels/lehre/Num1`