Numerik (Teil 1)

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 6

Abgabe: Bis Mittwoch, den 3. Februar 2016, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. (i) Bestimmen Sie die Gerschgorin-Kreise der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ strikt diagonaldominant und symmetrisch. Geben Sie eine obere Schranke der Konditionszahl $\mathrm{cond}_2(A)$ an.

Aufgabe 2. Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

durch, bestimmen Sie die Eigenwerte von A mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 3. (i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ und sei $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1. Zeigen Sie, dass

$$\lambda_2 = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ x \cdot v_1 = 0}} \frac{x^\top A x}{\|x\|_2^2}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass der Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau dann ein Eigenvektor der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist, wenn $\nabla r(x^*) = 0$ gilt mit der Funktion

$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to 0, \quad x \mapsto \frac{x^\top A x}{x^\top x}.$$

Aufgabe 4. Sei $\|A\|_{\mathcal{F}} = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$ die Frobenius-Norm.
(i) Zeigen Sie, dass $\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^\top A)$ sowie $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt und folgern Sie $\|Q^{-1}BQ\|_F = \|B\|_F$ für $B \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q \in O(n)$.
(ii) Zeigen Sie, dass $\|A\|_2 \leq \|A\|_{\mathcal{F}}$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt.

Homepage: `https://portal.uni-freiburg.de/aam/abtlg/ls/lsbartels/lehre/Num1`