Übungen zur Vorlesung Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1 (Nach oben beschränkte Mengen) (3 Punkte)
(a) Bestimmen Sie die kleinsten oberen Schranken der Mengen

$$M_1 = \{ \cos(n\pi) - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

und

$$M_2 = \{ \frac{x}{x+1} \mid x \in \mathbb{R},\ x > -1\}.$$

Werden diese Schranken angenommen, d.h. sind sie auch Maxima der Menge?
(b) Zeigen Sie, dass M_2 nicht nach unten beschränkt ist.

Aufgabe 2 (Rechenregeln der Multiplikation) (3 Punkte)
Verwenden Sie die Axiome der Addition und Multiplikation (*Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Existenz eines neutralen Elements, Existenz eines inversen Elements, Distributivgesetz*) um die folgenden Rechenregeln zu beweisen:

(a) $0a = 0$, für alle $a \in \mathbb{R}$.
(b) $-(ab) = (-a)b$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$.
(c) $(-a)(-b) = ab$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Geben Sie in jedem Schritt das jeweils verwendete Axiom an.

Aufgabe 3 (Injektivität, Surjektivität) (3 Punkte)
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie die Aussagen:

(a) f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ Es existiert $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$.
(b) f ist surjektiv $\Longleftrightarrow$ Es existiert $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Aufgabe 4 (Vollständige Induktion) (3 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen durch vollständige Induktion:

(a) $2n + 1 < n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mit $n \geq 3$.
(b) $n^2 < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mit $n \geq 5$.
(c) $2^n < n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mit $n \geq 4$.

Abgabe: Montag 02.11.2015 vor der Vorlesung.
Bitte schreiben Sie Ihren Namen, den Namen des Tutors und die Nummer der Übungsgruppe auf die Lösung.