Übungen zur Vorlesung Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön

Aufgabenblatt 13

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Bestimmen Sie die Werte der folgenden Integrale mittels Substitution bzw. partieller Integration:

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx, \qquad \int_1^e \frac{\ln(x^3)^2}{3x}\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)^2+3}}\,dx, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos(2x)\,dx.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)
(a) Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass aus $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ folgt, das

$$\int_a^b g(x)\,dx < \infty \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx < \infty$$

(b) Für $x > 0$ ist die *Gamma-Funktion* $\Gamma(x)$ definiert als das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion wohldefiniert ist, d.h das Integral konvergiert und es gilt $\Gamma(x) < \infty$.
Hinweis: Teilen Sie das Integral auf in $\int_0^k e^{-t}t^{x-1}\,dt = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt + \int_1^k e^{-t}t^{x-1}\,dt$.
(c) Zeigen Sie mittels partieller Integration das Funktionalgesetz $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Insbesondere gilt also $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
(a) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-1,1)$ von $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist. Verwenden Sie dabei die Gleichung $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
(b) Seien $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie mittels partieller Integration, dass

$$\int_a^b \arctan(\mathrm{x})\ dx = \left[x\arctan(\mathrm{x}) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{x=a}^{x=b}.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)
(a) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, welcher durch Rotation des Graphen von $f : [0, \frac{\pi}{4}] \to [0,\infty),\ f(x) = \tan(x)$ um die x-Achse entsteht.
Hinweis: Integrieren Sie über die kreisförmigen Flächeninhalte der vertikalen Schnittflächen.
(b) Sei $g : [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und streng monoton. Argumentieren Sie mit Hilfe einer Skizze, dass das Volumen, welches durch Rotation des Graphen von g um die y-Achse entsteht und durch die beiden Geraden $y = g(a)$ und $y = g(b)$ begrenzt wird, gegeben ist durch

$$V_g = \pi\int_{g(a)}^{g(b)} (g^{-1}(y))^2\,dy.$$

Zeigen Sie mit einer geeigneten Transformation, dass $V_g = \pi\int_a^b g'(x)x^2\,dx$ gilt.

Abgabe: Montag, 8.02.2016 vor der Vorlesung.
Hinweis: Bitte nehmen Sie an der Evaluierung der Vorlesung teil.