Übungen zur Vorlesung Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Seien $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für komplexe Zahlen:

(1) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$,

(2) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,

(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(4) $z\overline{z} = |z|^2 = \langle z, z\rangle$.

(b) Folgern Sie die Nullteilerfreiheit, d.h. $z_1 z_2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = 0$ oder $z_2 = 0$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden komplexen Zahlen den Betrag, die konjugiert komplexe Zahl, die Polardarstellung, Quadratwurzel, die zweite Potenz und die Inverse von

$$z_1 = -1, \quad z_2 = -1 + \frac{1}{i}, \quad z_3 = 1 + \sqrt{2}i.$$

Stellen Sie die Zahlen in einer Skizze dar.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in einem Koordinatensystem. Tragen Sie den Realteil einer komplexen Zahl an der x-Achse und Imaginärteil an der y-Achse auf:

$$M_1 = \{\ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\ \},\ M_2 = \{\ z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{z - \overline{z}}{2i} + 1\ \}.$$

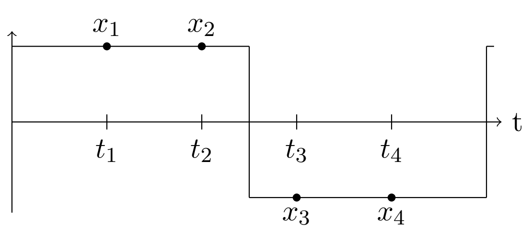
Aufgabe 4 (3 Punkte)

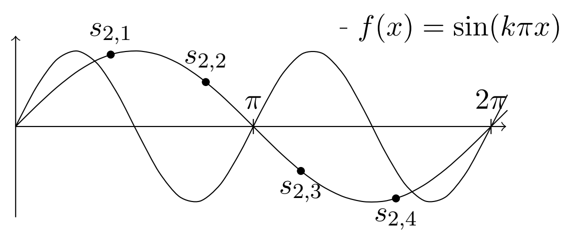
Mit Hilfe der Projektion auf eindimensionale Teilräume im $\mathbb{R}^n$ lassen sich Signale als Überlagerung von Sinusschwingungen darstellen. Wir messen ein periodisches Rechtecksignal zu $n = 4$ ausgewählten Zeitpunkten und erhalten die Messwerte $\vec{x} = (1, 1, -1, -1) \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$\vec{s_k} = \frac{2}{n+1}\Big(\sin(\frac{k\pi}{n+1}), \sin(\frac{2k\pi}{n+1}), \ldots, \sin(\frac{nk\pi}{n+1})\Big) \in \mathbb{R}^n,\ \text{für } k = 1, \ldots, n$$

(a) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\alpha_k = \langle \vec{x}, \vec{s_k}\rangle$.

(b) Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass $\vec{x} = \alpha_1\vec{s}_1 + \alpha_2\vec{s}_2 + \alpha_3\vec{s}_3 + \alpha_4\vec{s}_4$.





Abgabe: Montag, 23.11.2016 vor der Vorlesung.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, den **Namen des Tutors** und die **Nummer der Übungsgruppe** auf die Lösung.