Übungen zur Vorlesung Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie durch wiederholte Anwendung der binomischen Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ die Polynomfaktorisierungen in $\mathbb{C}$ von

$$p_1(z) = z^4 - 1, \quad p_2(z) = z^8 - 1.$$

(b) Bestimmen und skizzieren Sie die Lösungsmenge der Gleichungen

$$z^4 = 1, \; z^6 = 1 \text{ und } z^8 = 1.$$

Argumentieren Sie mit der Eigenschaft der komplexen Multiplikation und Polarkoordinaten.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $p : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ ein gerades Polynom vom Grad 4 mit Nullstellen bei $z = 1$ und $z = i$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aussagen der Vorlesung, dass p eindeutig bestimmt ist, d.h. es gibt nur ein Polynom mit diesen Eigenschaften. Geben Sie das Polynom p an.

Hinweis: Eine Funktion $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ heißt gerade, wenn $f(z) = f(-z)$, für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\; f(x) = |x| - x$ monoton fallend, aber nicht streng monoton fallend ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion. Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität. Beweisen Sie Ihre jeweilige Aussage oder konstruieren Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

(a) Sei $r > 0$. Skizzieren Sie die Mengen:

$$\tilde{K}_r = \{\ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \varphi \in [0, 2\pi)\ \}, \quad K_r = \{\ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{x}| = r\ \}.$$

(b) Skizzieren Sie die Menge

$$A = \{\ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix},\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 1 - \frac{\varphi}{\pi} \le r \le 1\ \}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f_r : [0, 2\pi) \to K_r,\ \varphi \mapsto r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

bijektiv, also injektiv und surjektiv, ist.

Hinweis: Betrachten Sie für die Injektivität die x- und y-Komponente der Funktion f_r separat. Zeigen Sie, dass Sie die Fälle $\varphi \in [0, \pi]$ und $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ getrennt betrachten können. Verwenden Sie Aufgabe 3(b).

Abgabe: Montag, 30.11.2016 vor der Vorlesung.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, den **Namen des Tutors** und die **Nummer der Übungsgruppe** auf die Lösung.