Übungen zur Vorlesung Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Berechnen Sie folgende Polynomdivision:

$$(8x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 3x) \ : \ (2x^2 + 1).$$

Geben Sie die Polynomfaktorisierungen von $p(x) = 8x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 3x$ in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ an.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Seien $g, q, r : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ Polynome. Dabei habe q Grad $n \geq 1$ und r besitze den Grad k mit $k < n$. Zeigen Sie, dass aus

$$g(x)q(x) + r(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

folgt, dass $g(x) = 0$ und $r(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

(a) Sei $x = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass durch $a_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\varphi+2k\pi}{n})}$, $k = 0, \ldots, n-1$ alle Lösungen der komplexen Gleichung $z^n = x$ gegeben sind.

(b) Angenommen $a^n = 1, n \geq 2$. Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \begin{cases} n, & \text{falls } a = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

(c) Beweisen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ und $n \geq 2$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\big(x + \frac{2k\pi}{n}\big) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin\big(x + \frac{2k\pi}{n}\big) = 0.$$

Hinweis: Überzeugen Sie sich für den Aufgabenteil b) zunächst, dass die geometrische Summenformel (siehe Beispiel 3.2 im Vorlesungsskript) auch im Komplexen, genauer für $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$ gilt.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Als Dreiphasenwechselstrom oder Starkstrom wird ein System von drei miteinander verketteten Wechselströmen

$$U_k(t) = 230V \sin\big(\omega t + \frac{2k\pi}{3}\big), \ k = 0, 1, 2,$$

mit Kreisfrequenz $\omega > 0$ bezeichnet.

(a) Skizzieren Sie die Spannungen U_k zum Zeitpunkt $t = 0$ als Imaginärteil von komplexen Vektoren in einem Schaubild.

(b) Die Differenzen $U_{ij}(t) = U_i(t) - U_j(t)$ werden als verkettete Spannungen bezeichnet. Berechnen Sie die Amplitude, d.h. den maximalen Wert von $U_{10}(t)$, $U_{21}(t)$ und $U_{20}(t)$. Wo finden Sie die Amplituden in Ihrem Schaubild?

Hinweis: Zeigen Sie zunächst (analog zur Vorlesung), dass $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$.

Abgabe: Montag, 7.12.2016 vor der Vorlesung.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, den **Namen des Tutors** und die **Nummer der Übungsgruppe** auf die Lösung.