Übungen zur Vorlesung Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei a_n eine Zahlenfolge. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $a_n \to +\infty \implies \frac{1}{a_n} \to 0$.

(b) $a_n \to 0,\ a_n > 0 \implies \frac{1}{a_n} \to +\infty$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Aus $0 \leq x < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ folgt, dass $x = 0$.

(b) Aus $a < b + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ folgt, dass $a < b$.

(c) Jede streng monoton fallende Folge positiver Zahlen konvergiert gegen Null.

(d) Konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen.

Hinweis: Wählen Sie in a) und b) $\varepsilon = \frac{1}{n}$ und gehen Sie zum Grenzwert über.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $x_m = 10^m - 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$ durch 9 teilbar ist, d.h $\frac{x_m}{9} \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie eine geeignete geometrische Summe.

(b) Beweisen Sie die Aussage: Eine Zahl $x \in \mathbb{N}$ ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme $q(x)$ durch 3 teilbar ist. Konstruieren Sie dazu eine Darstellung $x = 9y + q(x)$, mit $y \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Im Dezimalsystem können wir eine Zahl $x \in \mathbb{N}$ darstellen durch $x = \sum_{k=0}^{n} a_0 10^k$, mit Ziffern $a_0, \ldots, a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Die Quersumme ist definiert als die Summe der Ziffern einer Zahl, $q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Beispielsweise ist die Quersumme der Zahl $1074 = 4 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3$ gerade $1 + 0 + 7 + 4 = 12$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

(a) Sei $q \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass $x = \sqrt{q}$ die Gleichung $x = \frac{1}{2}(x + \frac{q}{x})$ erfüllt.

(b) Sei $q > 1$. Die Zahlenfolge

$$x_0 = q,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{q}{x_n}),\ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

definiert einen Algorithmus zur Berechnung von $\sqrt{q}$. Berechnen Sie für $q = 2$ die ersten 5 Folgenglieder und erstellen Sie eine Skizze.

(c) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $\sqrt{q} < x_{n+1} < x_n < q$. Argumentieren Sie mittels Aussagen aus der Vorlesung, dass q_n eine konvergente Folge ist, d.h. $q_n \to \xi$, mit $\xi \in \mathbb{R}$.

(d) Beweisen Sie durch Grenzübergang in (1), dass $\xi = \sqrt{q}$. Gilt die Aussage auch für $q < 1$?

Aufgabe 5 (2 Sonderpunkte)

Schreiben Sie Ihren Namen, den Namen des Tutors und die Gruppennummer oben in die erste Zeile Ihrer Abgabe.

Abgabe: Montag, 21.12.2015 vor der Vorlesung.