Übungen zur Vorlesung Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

Wintersemester 2015/16

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Eine Funktion f kann in x_0 stetig fortgesetzt werden, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert. Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen im Punkt x_0 stetig fortgesetzt werden können und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f_i(x)$.

(a) $x_0 = 1, \quad f_1 : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^4-1}{x-1}$.

(b) $x_0 = 0, \quad f_2 : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$.

(c) $x_0 = 0, \quad f_3 : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x-1}{x}$.

(d) $x_0 = 5, \quad f_4 : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2-4x+2, & x > 5 \\ 3x-9, & x < 5 \end{cases}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Seien $I_n = [a_n, b_n]$ Intervalle mit $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ und $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt und dass $x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{\to\infty} b_n$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Seien $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in (a,b)$ mit $g(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $g(x) \neq 0$ für alle x mit $|x - x_0| < \frac{1}{N}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

(a) Die *Fibonacci*-Folge f_n ist durch die Rekursionsvorschrift

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1 \quad \text{und} \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \text{für } n > 2$$

definiert. Berechnen Sie die ersten 10 Folgenglieder.

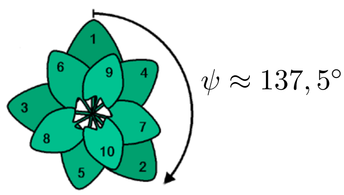
(b) Die positive Zahl g, welche $g = 1 + \frac{1}{g}$ erfüllt, heißt *goldener Schnitt*. Bestimmen Sie g.

(c) Zeigen Sie, dass für die Folge $x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ gilt $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ für $n > 1$. Beweisen Sie, dass $x_n \to g$ für $n \to \infty$, indem Sie zunächst mittels vollständiger Induktion zeigen, dass

$$|x_n - g| \leq \frac{1}{g^{n+1}}.$$

(d) Recherchieren Sie eine Anwendung des *goldenen Schnitts* aus Kunst, Architektur oder Biologie. Fassen Sie Ihre Ergebnisse in knapper Form zusammen. Eine kleine Übersicht finden Sie unter `http://www.flanagan-neurophone.com/Glossar/phi/phi.html`.

Für bestimmte Pflanzen entspricht der Winkel ψ zwischen zwei aufeinander folgenden Blättern einer Approximation des *goldenen Winkels*, d.h. $\frac{2\pi-\psi}{\psi} = g$. Dadurch wird eine optimale Ausbeute an Sonnenlicht gewährleistet, siehe auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt`. Die Fibonacci-Folge beschreibt zudem die Zunahme einer Kaninchen-Population.



Abgabe: Montag, 11.01.2016 vor der Vorlesung.
Frohe Weihnachten!