Praktikum zur Vorlesung Einführung in die Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, M. Sc. Marijo Milicevic

Projekt 1: Transportgleichung

Projekt 1.1 (10 Punkte)

(i) Wir betrachten die Transportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= 0 \qquad && \text{in } (0,T)\times(0,1), \\ u(t,0) &= 0, && \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{für } x \in [0,1], \end{aligned}$$

wobei $T = 1$, $u_0(x) = 1$ für $0.4 \le x \le 0.6$ und $u_0(x) = 0$ sonst. Implementieren Sie ein numerisches Verfahren, um die obige Transportgleichung zu lösen, indem Sie Vorwärtsdifferenzenquotienten in der Zeit und Rückwärtsdifferenzenquotienten im Ort verwenden. Testen Sie die Diskretisierungsparameter

$$(\Delta t, \Delta x) = \frac{1}{80}(2,2), \quad (\Delta t, \Delta x) = \frac{1}{80}(2,1), \quad (\Delta t, \Delta x) = \frac{1}{80}(1,2).$$

Überprüfen Sie, für welche Paare von Diskretisierungsparametern die CFL-Bedingung erfüllt ist, und vergleichen Sie die numerische Lösung mit der exakten Lösung der Transportgleichung.

(ii) Modifizieren Sie Ihren Code derart, dass Sie ein numerisches Verfahren für

$$\partial_t u + a(x)\partial_x u = 0$$

erhalten, wobei $a(x) > 0$ eine gegebene Funktion ist. Wie müsste die CFL-Bedingung für nicht-konstante Funktionen a formuliert werden? Testen Sie Ihren Code für den Fall $a(x) = (1 + 4x^2)^{1/2}$ und Anfangsbedingung $u_0(x) = 1$ für $0.05 \le x \le 0.25$ und $u_0(x) = 0$ sonst. Vergleichen Sie die numerischen Lösungen für verschiedene Diskretisierungsparameter.

(iii) Testen Sie Ihr Programm für $a(x) = -1$ und Anfangsbedingung $u_0(x) = 1$ für $0.4 \le x \le 0.6$ und $u_0(x) = 0$ sonst. Gibt es Paare von Diskretisierungsparametern, die die CFL-Bedingung erfüllen?

(iv) Verändern Sie Ihren Code derart, dass nur Vorwärtsdifferenzenquotienten verwendet werden. Hier sei nun die Randbedingung $u(1,t) = 0$ für $t \in [0,T]$ gegeben. Leiten Sie die CFL-Bedingung für dieses Verfahren her und testen Sie Ihr Programm für verschiedene Parameter Δt und Δx.

Projekt 1.2 (10 Punkte)

Das *Upwind-Verfahren* für die Transportgleichung ist definiert durch

$$U_j^{k+1} = \begin{cases} (1-\mu_j^k)U_j^k + \mu_j^k U_{j-1}^k, & \mu_j^k \ge 0, \\ (1+\mu_j^k)U_j^k - \mu_j^k U_{j+1}^k, & \mu_j^k < 0, \end{cases}$$

wobei $\mu_j^k = a(t_k, x_j)\Delta t/\Delta x$. Implementieren Sie dieses Verfahren und testen Sie es für verschiedene Anfangsbedingungen, verschiedene Diskretisierungsparameter, die Funktion $a(x) = \sin(x)$ und Randbedingungen definiert durch $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse und die Gültigkeit einer CFL-Bedingung.

Abgabe: bis spätestens Mittwoch, den 02.11.2016, 14 Uhr per E-Mail an den Tutor.