Praktikum zur Vorlesung Einführung in die Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, M. Sc. Marijo Milicevic

Projekt 2: Wärmeleitungsgleichung

Projekt 2.1 (10 Punkte)

(i) Implementieren Sie ein θ-Mittelpunktsverfahren, um das Anfangsrandwertproblem $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$ in $(0,T) \times (0,1)$ mit $T = 1$, $\kappa = 1/100$, $u(0,x) = \sin \pi x$ für $x \in (0,1)$, und $u(t,0) = u(t,1) = 0$ für $t \in [0,T]$ zu lösen. Setzen Sie $\Delta x = 0.05$ und bestimmen Sie experimentell Δt so, dass das Verfahren für $\theta = 0$ stabil ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die exakte Lösung des Problems gegeben ist durch

$$u(t,x) = \sin(\pi x)\, e^{-\kappa \pi^2 t}.$$

Bestimmen Sie für $\theta = 1/2$, $\theta = 3/4$ und $\theta = 1$, und $\Delta x = \Delta t = 2^{-j}/10$, $j = 2, \ldots, 5$, den Approximationsfehler im Punkt $(t,x) = (1, 0.5)$. Verwenden Sie hierbei das Anzeigeformat `long`. Plotten Sie die Fehler in einem Fenster, indem Sie die Befehle `semilogy` und `hold on/off` verwenden. Wie lautet Ihr Fazit?

(iii) Modifizieren Sie Ihren Code um ein Verfahren für die Gleichung $\partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = f$ zu erhalten. Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem in $(0,T) \times (0,1)$ mit $T = 2$, $f(x) = (x - 1/2)^2$, homogenen Dirichlet-Randdaten in $x = 0$ und $x = 1$, und Anfangsbedingung definiert durch $u_0(x) = 1$ für $0.45 \le x \le 0.55$ und $u_0(x) = 0$ sonst. Vergleichen Sie die numerischen Lösungen für verschiedene Diskretisierungsparameter und $\theta = 0, 1/2, 1$.

Projekt 2.2 (10 Punkte)

Die Vektoren $\{\varphi_p \in \mathbb{R}^{J+1} : \ p = 1, \ldots, J-1\}$, definiert durch $\varphi_{p,j} = \sqrt{2} \sin(\pi p j \Delta x)$, $j = 0, \ldots, J$, bilden eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $(\ell^2_{0,\Delta x}, (\cdot,\cdot)_{2,\Delta x})$, wobei

$$\ell^2_{0,\Delta x} := \{V \in \mathbb{R}^{J+1} : \ V_0 = V_J = 0\} \quad \text{und} \quad (V,W)_{2,\Delta x} := \Delta x \sum_{j=0}^{J} V_j W_j.$$

(i) Berechnen Sie für das Anfangsrandwertproblem aus Projekt 2.1 (i) für $\theta = 0, 1/2, 1$ und verschiedene Diskretisierungsparameter die Differenz $\|U^0\|_{2,\Delta x} - \|U^k\|_{2,\Delta x}$ und plotten Sie sie als Funktion von $k = 0, \ldots, K = T/\Delta t$. Hierbei sind $U^k = (U_j^k)_{j=0,\ldots,J}$ und $U^0 = (u_0(x_j))_{j=0,\ldots,J}$.

(ii) Berechnen Sie für $\theta = 1/2$ und $\theta = 1$, sowie $\Delta x = \Delta t = 2^{-j}/10$, $j = 3, 4, 5$, den Fehler $\|U^k - u^k\|_{2,\Delta x}$, $k = 0, \ldots, K$, und plotten Sie den Fehler als Funktion von k. Hierbei sind $u^k = (u(t_k, x_j))_{j=0,\ldots,J}$ und u aus Projekt 2.1 (ii).

Abgabe: bis spätestens Mittwoch, den 16.11.2016, 14 Uhr per E-Mail an den Tutor.