Praktikum zur Vorlesung Einführung in die Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, M. Sc. Marijo Milicevic

Projekt 3: Wärmeleitungsgleichung (Teil II) und Wellengleichung

Projekt 3.1 (10 Punkte)

(i) Modifizieren Sie Ihr θ-Mittelpunktsverfahren aus Projekt 2 (mit $\theta = 1/2$), um das Anfangsrandwertproblem $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ in $(0,T) \times (0,1)$ mit $T = 1$, $u(0,x) = \sin \pi x$ für $x \in (0,1)$, und $u(t,0) = u_{D,\ell}(t)$ und $u(t,1) = u_{D,r}(t)$ für $t \in [0,T]$ zu lösen. Verwenden Sie hierfür die Fortsetzung $\widetilde{u}_D(t,x) = (1-x)u_{D,\ell}(t) + x u_{D,r}(t)$ und schreiben Sie die Lösung als $u = \widehat{u} + \widetilde{u}_D$. Die Funktion $\widehat{u}$ ist Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t \widehat{u} - \partial_x^2 \widehat{u} = -\partial_t \widetilde{u}_D$ mit homogenen Dirichlet-Randdaten und mit Anfangsbedingung $\widehat{u}(0,x) = u_0(x) - \widetilde{u}_D(0,x)$. Testen Sie Ihr Verfahren für $u_{D,\ell}(t) = 0$, $u_{D,r}(t) = \sin(\pi t)$ und $u_{D,\ell}(t) = t$, $u_{D,r}(t) = \sin(\pi t)$ sowie für verschiedene Diskretisierungsparameter.

(ii) Modifizieren Sie Ihren Code derart, dass Sie ein Verfahren für $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ in $(0,T) \times (0,1)$ mit $T = 10$, $u(0,x) = \exp\Big(-\frac{1}{16(x-1/4)(3/4-x)}\Big)$ für $x \in (1/4, 3/4)$ und $u(0,x) = 0$ sonst, mit Neumann-Randbedingungen $\partial_x u(t,0) = g_\ell(t)$ und $\partial_x u(t,1) = g_r(t)$ für $t \in [0,T]$ erhalten. Verwenden Sie hierfür $\partial_x^+ U_0^{k+1}$ bzw. $\partial_x^- U_J^{k+1}$ als Diskretisierung von $\partial_x u(t_{k+1},0)$ bzw. $\partial_x u(t_{k+1},1)$, d.h. verwenden Sie $\partial_x^+ U_0^{k+1} = g_\ell(t_{k+1})$ und $\partial_x^- U_J^{k+1} = g_r(t_{k+1})$. Testen Sie Ihr Verfahren für homogene Neumann-Randdaten und $\Delta t = \Delta x = 10^{-m}$, $m = 1,2,3$. Sind die numerischen Lösungen sinnvoll? Berechnen Sie $c_0 \approx \int_0^1 u(0,x)\,\mathrm{d}x$ mit der Funktion `trapz` mit $10^3 + 1$ Stützstellen sowie $\max_{j=0,\dots,J} |U_j^K - c_0|$. Verwenden Sie hierbei das Anzeigeformat `long`.

(iii) Verwenden Sie nun $\widehat{\partial}_x U_0^{k+1} = g_\ell(t_{k+1})$ und $\widehat{\partial}_x U_J^{k+1} = g_r(t_{k+1})$ als Diskretisierung von $\partial_x u(t_{k+1},0) = g_\ell(t_{k+1})$ bzw. $\partial_x u(t_{k+1},1) = g_r(t_{k+1})$. Führen Sie hierfür sogenannte *Geisterpunkte* $x_{-1} = -\Delta x$ und $x_{J+1} = 1 + \Delta x$ ein. Wiederholen Sie die Experimente aus Aufgabenteil (ii). Was fällt auf? Begründen Sie, weshalb es sinnvoll ist, $\widehat{\partial}_x U_0^{k+1}$ bzw. $\widehat{\partial}_x U_J^{k+1}$ statt $\partial_x^+ U_0^{k+1}$ bzw. $\partial_x^- U_J^{k+1}$ zur Diskretisierung von $\partial_x u(t_{k+1},0)$ bzw. $\partial_x u(t_{k+1},1)$ zu verwenden.

Projekt 3.2 (10 Punkte)

(i) Lösen Sie approximativ die Wellengleichung $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ in $(0,T) \times (0,1)$ mit homogenen Dirichlet-Randdaten und Anfangsbedingungen $v_0(x) = 0$ und $u_0(x) = \sin(\pi x)$, indem Sie ein explizites Differenzenverfahren mit Diskretisierungsparametern $(\Delta t, \Delta x) = \frac{1}{40}(2,2)$, $(\Delta t, \Delta x) = \frac{1}{40}(2,1)$ und $(\Delta t, \Delta x) = \frac{1}{40}(1,2)$ implementieren. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse für die verschiedenen Diskretisierungsparameter und erklären Sie die Unterschiede in den numerischen Lösungen.

(ii) Ändern Sie die Anfangsbedingungen zu $u_0(x) = 0$ und $v_0(x) = 1$ für $0.4 \le x \le 0.6$ und $v_0(x) = 0$ sonst, und testen Sie Ihr Programm für verschiedene Paare von Diskretisierungsparametern.

(iii) Untersuchen Sie experimentell die Verletzung eines diskreten Energieerhaltungsprinzips indem Sie die Größe

$$\Gamma^k = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^{J-1} |\partial_t^+ U_j^k|^2 + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^{J} |\partial_x^- U_j^k|$$

als Funktion von $k = 0, \dots, K-1$ plotten.

Abgabe: bis spätestens Mittwoch, den 30.11.2016, 14 Uhr per E-Mail an den Tutor.