Praktikum zur Vorlesung Einführung in die Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, M. Sc. Marijo Milicevic

Projekt 4: Wellengleichung (Teil II) und Poisson-Problem

Projekt 4.1 (10 Punkte)

(i) Implementieren Sie das unbedingt stabile implizite Differenzenverfahren

$$\partial_t^+ \partial_t^- U_j^k = \frac{1}{4} \partial_x^+ \partial_x^- (U_j^{k+1} + 2U_j^k + U_j^{k-1})$$

zur Approximation der Wellengleichung $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ in $(0,T) \times (0,1)$ mit homogenen Dirichlet-Randdaten und Anfangsbedingungen $u(0,x) = u_0(x)$ und $\partial_t u(0,x) = v_0(x)$ für $x \in (0,1)$ mit gegebenen Anfangsdaten $u_0, v_0 \in C([0,1])$. Verwenden Sie eine Diskretisierung für $\partial_t u(0,x)$, welche quadratische Konvergenz liefert. Testen Sie Ihr Programm mit der exakten Lösung

$$u(t,x) = \cos(\pi t) \sin(\pi x).$$

(ii) Für $k = 0, \dots, K = T/\Delta t$ sei $(U_j^k)_{j=0,\dots,J}$ die Lösung des impliziten Differenzenverfahrens im k-ten Zeitschritt. Überprüfen Sie experimentell, dass die Größe

$$\Gamma^k = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^{J-1} |\partial_t^+ U_j^k|^2 + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^{J} |\partial_x^- U_j^{k+1/2}|^2$$

unabhängig von $k = 0, \dots, K-1$ ist. Hierbei ist $U_j^{k+1/2} = (U_j^{k+1} + U_j^k)/2$.

Projekt 4.2 (10 Punkte)

(i) Definieren Sie Funktionen f, g und u_D so, dass $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= u_D && \text{auf } \Gamma_D = [0,1] \times \{0\}, \\ \partial_n u &= g && \text{auf } \Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D, \end{aligned}$$

ist. Berechnen Sie Approximationen der Lösung mittels finiter Differenzen. Verwenden Sie hierbei Geisterpunkte und zentrale Differenzenquotienten für die Approximation der Normalenableitung auf Γ_N. Weisen Sie experimentell nach, dass das Verfahren quadratisch konvergent ist.

(ii) Es sei $\Omega = B_1(0)$. Modifizieren Sie Ihr Differenzenverfahren für das Poisson-Problem, um ein Verfahren für

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

zu erhalten. Vergleichen Sie Ihre Approximationen mit der exakten Lösung $u(x) = (|x|^2 - 1)/4$.

Abgabe: bis spätestens Mittwoch, den 14.12.2016, 14 Uhr per E-Mail an den Tutor.