Praktikum zur Vorlesung Einführung in die Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, M. Sc. Marijo Milicevic

Projekt 5: (Ir-)reversibilität und zweidimensionale Wärmeleitung

Projekt 5.1 (10 Punkte)

(i) Verwenden Sie Ihr θ-Mittelpunktsverfahren aus Projekt 2 um das Anfangsrandwertproblem $\partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = 0$ in $(0,T) \times (0,1)$ mit $\kappa = 1/10$, homogenen Dirichlet-Randdaten und $u(0,x) = \sin(\pi x)$ für $x \in (0,1)$ zu lösen. Machen Sie den Prozess numerisch rückgängig, indem Sie ausgehend von dem Vektor $(U_j^K)_{j=0,\dots,J}$ die zur Berechnung des Vektors $(U_j^K)_{j=0,\dots,J}$ vorgenommenen Rechnungen invertieren. Vergleichen Sie den hierdurch erhaltenen Vektor $(\widetilde{U}_j^0)_{j=0,\dots,J}$ mit den Anfangsdaten $(U_j^0)_{j=0,\dots,J} = (u(0,x_j))_{j=0,\dots,J}$ und berechnen Sie den Fehler $\max_{j=0,\dots,J} |U_j^0 - \widetilde{U}_j^0|$. Führen Sie dieses Experiment für $T = 10^\ell$, $\ell = -1, 0, 1$, Diskretisierungsparameter $\Delta x = 10^{-m}$ und $\Delta t = T \cdot 10^{-m}$, $m = 1, 2$, und $\theta = 1/2, 1$ durch. Was fällt Ihnen auf?

(ii) Verwenden Sie Ihr implizites Differenzenverfahren aus Projekt 4 um die Wellengleichung $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ in $(0,T) \times (0,1)$ mit homogenen Dirichlet-Randdaten und $u(0,x) = \sin(\pi x)$, $v_0(x) = 0$ für $x \in (0,1)$ zu lösen. Führen Sie dieselben Experimente wie in Projekt 5.1 (i) durch mit $T = 10^\ell$, $\ell = -1, 0, 1$, sowie $\Delta x = 10^{-m}$ und $\Delta t = T \cdot 10^{-m}$, $m = 1, 2$. Welche Unterschiede sind im Vergleich zur Wärmeleitungsgleichung zu erkennen?

Projekt 5.2 (10 Punkte)

Wir betrachten einen durch das Gebiet $\Omega = (0, 0.4) \times (0, 0.3) \times (-\ell_z, \ell_z)$ definierten Ofen und nehmen an, dass auf der Rückseite $x = 0$ des Ofens die Temperatur konstant $\theta = 200°\mathrm{C}$ betrage, während die Vorderseite $x = 0.4$ entweder geöffnet ($\theta = 20°\mathrm{C}$) oder geschlossen ($\partial_n \theta = 0$) sei und die übrigen Seiten $y = 0$ und $y = 0.3$ isoliert, d.h. $\partial_n \theta = 0$, seien. Zum Zeitpunkt $t = 0$ betrage die Temperatur überall im Ofen $\theta = 200°\mathrm{C}$. Wir können ein mathematisches Modell herleiten, indem wir verwenden, dass die Wärmedichte proportional zur Temperatur ist, d.h. $w = \rho c_p \theta$, und der Wärmefluss proportional zum Temperaturgradienten ist, d.h. $q = -\kappa \nabla \theta$, und dass Wärmeenergie erhalten bleibt, d.h. $\partial_t w + \operatorname{div} q = 0$. Hier seien die Dichte, der Wärmeleitkoeffizient und die Wärmekapazität gegeben durch $\rho = 1.435 \cdot 10^{-3} \mathrm{kg/m}^3$, $\kappa = 0.024 \mathrm{W/m\,K}$ bzw. $c_p = 1.007 \cdot 10^3 \mathrm{J/kg\,K}$. Wir führen eine Dimensionsreduktion durch, indem wir θ durch durch seinen vertikalen Mittelwert $\overline{\theta}$ ersetzen, d.h. wir betrachten

$$\overline{\theta}(t,x,y) = \frac{1}{2\ell_z} \int_{-\ell_z}^{\ell_z} \theta(t,x,y,z) \,\mathrm{d}z.$$

Formulieren Sie ein Anfangsrandwertproblem um die gemittelte Temperatur $\overline{\theta}$ in $\overline{\Omega} = (0, 0.4) \times (0, 0.3)$ zu beschreiben. Implementieren Sie ein Crank-Nicolson-Verfahren und simulieren Sie die folgenden Szenarien: (i) der Ofen ist 30s geöffnet, 30s geschlossen, 30s geöffnet; (ii) der Ofen ist 30s geschlossen, 60s geöffnet. Entscheiden Sie anhand Ihrer Simulationen, ob es energetisch sinnvoller ist, den Ofen einmal für einen längeren Zeitraum oder zweimal für einen kürzeren Zeitraum zu öffnen. Diskutieren Sie die Begrenztheit des Modells und des numerischen Verfahrens.

Abgabe: bis spätestens Mittwoch, den 11.01.2017, 14 Uhr per E-Mail an den Tutor.
Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!