Praktikum zur Vorlesung Einführung in die Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, M. Sc. Marijo Milicevic

Projekt 6: Finite-Elemente-Methode

Projekt 6.1 (10 Punkte)

Für $\gamma \in (0, 2\pi]$ definieren wir

$$\Omega_\gamma = (-1,1)^2 \cap \{x = r(\cos\phi, \sin\phi) : r > 0,\ 0 < \phi < \gamma\}.$$

Sei $u_D(r,\phi) = r^{\pi/\gamma}\sin(\phi\pi/\gamma)$ für $x = r(\cos\phi, \sin\phi) \in \Gamma_D = \partial\Omega_\gamma$. Die exakte Lösung des Poisson-Problems mit $f = 0$ ist dann gegeben durch $u(r,\phi) = r^{\pi/\gamma}\sin(\phi\pi/\gamma)$. Bestimmen Sie für $\gamma = \ell\pi/2$, $\ell = 1, \dots, 4$, experimentell die Konvergenzraten für die diskreten Fehler

$$\delta_h^{L^2} = \|u_h - \mathcal{I}_h u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \delta_h^{L^\infty} = \|u_h - \mathcal{I}_h u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

und den H^1-Approximationsfehler

$$e_h^{H^1} = \|\nabla(u_h - u)\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei das zweite Integral mit der Mittelpunktsregel approximiert werden kann. Berechnen Sie hierfür für eine Folge von uniformen Triangulierungen von Ω_γ die Galerkin-Approximationen u_h. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

Projekt 6.2 (10 Punkte)

Es sei $\Omega = (0,1)^2$, $g \in L^2(\Omega)$ und $\alpha > 0$. Der eindeutige Minimierer $u \in H^1(\Omega)$ des Funktionals

$$u \mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega (u-g)^2 \,\mathrm{d}x$$

erfüllt die Gleichung

$$0 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \alpha \int_\Omega (u-g)v \,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega). \tag{1}$$

(i) Begründen Sie, weshalb das Problem (1) wohlgestellt ist.

(ii) Implementieren Sie die $P1$-Finite-Elemente-Methode um Approximationen von u zu berechnen, d.h. berechnen Sie für eine Folge von uniformen Triangulierungen $\mathcal{T}_h$ von Ω Funktionen $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \,\mathrm{d}x + \alpha\int_\Omega u_h v_h \,\mathrm{d}x = \alpha \int_\Omega g v_h \,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h).$$

Verwenden Sie bei der Berechnung der rechten Seite die Mittelpunktsregel. Testen Sie Ihr Programm für uniforme Triangulierungen mit Gitterweiten $h = \sqrt{2}2^{-\ell}, \ell = 3, \dots, 7$, $\alpha = 10^m$, $m = 0, \dots, 5$, und $g = g_h = \chi_{B_{1/5}(x_\Omega)} + \eta_h$, wobei $x_\Omega = (1/2, 1/2)$ und $\eta_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}_h)$ elementweise konstant sei mit Funktionswerten, die gleichverteilt im Intervall $[-0.1, 0.1]$ seien. Sie können η_h mit dem Befehl `0.2*(rand(nE,1)-0.5)` generieren, wobei `nE` die Anzahl der Dreiecke bezeichnet. Visualisieren Sie die Galerkin-Approximationen mit dem Befehl `trisurf` und setzen Sie dabei die Achsenbegrenzungen auf `axis([0 1 0 1 -0.1 1.1])` und die Farbskalierung auf `caxis([0 1])`. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse. Wofür könnte die betrachtete Gleichung geeignet sein? Welche Rolle spielt dabei der Parameter α?

(iii) Formulieren Sie das Problem mit Dirichlet-Randbedingungen, begründen Sie die Wohlgestelltheit und wiederholen Sie die Experimente aus (ii) für homogene Dirichlet-Randdaten.

Abgabe: bis spätestens Mittwoch, den 01.02.2017, 14 Uhr per E-Mail an den Tutor.