Einführung in Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/17

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Informationen und aktuelle Hinweise zur Vorlesung finden Sie im Internet unter
`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws16/tun0` .

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass die folgenden Abschätzungen für Differenzenquotienten gelten:

$$|\partial^{\pm} u(x_j) - u'(x_j)| \leq \frac{\Delta x}{2} \|u''\|_{C([0,1])},$$
$$|\widehat{\partial} u(x_j) - u'(x_j)| \leq \frac{\Delta x^2}{6} \|u'''\|_{C([0,1])},$$
$$|\partial^+ \partial^- u(x_j) - u''(x_j)| \leq \frac{\Delta x^2}{12} \|u^{(4)}\|_{C([0,1])}.$$

Zeigen Sie, dass diese nicht gültig sind, falls u nicht die erforderlichen Differenzierbarkeitseigenschaften aufweist.
(ii) Zeigen Sie, dass $\partial^+\partial^- = \partial^-\partial^+$.
(iii) Leiten Sie eine Fehlerabschätzung für $\partial^+\partial^+ u(x_j) - u''(x_j)$ her.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass das *upwind*-Verfahren für die Transportgleichung äquivalent ist zum Verfahren

$$\partial_t^+ U_j^k + a_j^k \widehat{\partial}_x U_j^k = |a_j^k| \Delta x \partial_x^+ \partial_x^- U_j^k,$$

und diskutieren Sie die Berücksichtigung von Randbedingungen.

Aufgabe 3. (i) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\phi_\ell(x) = e^{\mathrm{i}kx}$, $x \in [-\pi, \pi]$, $\ell \in \mathbb{Z}$, ein orthonormales System in $L^2(-\pi, \pi)$ definieren, d.h., für alle $\ell, m \in \mathbb{Z}$, gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_\ell(x) \overline{\phi_m(x)} \, \mathrm{d}x = \delta_{\ell m}.$$

(ii) Für $f \in L^2(-\pi, \pi)$ and $\ell \in \mathbb{Z}$ sei

$$f_\ell = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\phi_\ell(x)} \, \mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |f_\ell|^2.$$

Aufgabe 4. Sei u eine Lösung der partiellen Differenzialgleichung $\partial_t u + a(t,x)\partial_x u = 0$.
(i) Zeigen Sie, dass u konstant ist entlang von Kurven $(t, y(t))$ für Lösungen des Anfangsrandwertproblems $y'(t) = a(t, y(t))$, $y(0) = x_0$, sogenannter Charakteristiken.
(ii) Bestimmen Sie die Charakteristiken für die Gleichung $\partial_t u + tx\partial_x u = 0$, d.h., für $a(t,x) = tx$, skizzieren Sie diese, und bestimmen Sie die Lösung der Differenzialgleichung für die Anfangsbedingung $u_0(x) = \sin(x)$.

Abgabe: Bis Montag, den 24. Oktober 2016, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).