Einführung in Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/17

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass der Raum $C(\bar{\Omega})$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ vollständig ist.

Aufgabe 2. (i) Zeigen Sie, dass der lineare Operator $A : V \to W$ stetig ist, genau dann wenn er beschränkt ist derart, dass ein $c > 0$ existiert, so dass

$$\|Av\|_W \leq c\|v\|_V$$

für alle $v \in V$.
(ii) Sei $A : V \to W$ linear und beschränkt und sei $\|A\|_{\mathrm{L}(V,W)}$ das Infimum aller solcher Konstanten $c > 0$. Zeigen Sie, dass für alle $v \in V$ gilt:

$$\|Av\|_W \leq \|A\|_{\mathrm{L}(V,W)}\|v\|_V.$$

(iii) Zeigen Sie, dass $A \mapsto \|A\|_{\mathrm{L}(V,W)}$ eine Norm auf dem Raum der linearen und beschränkten Operatoren $\mathrm{L}(V,W)$ definiert, wodurch dieser als Banachraum charakterisiert werden kann.

Aufgabe 3. Sei $(v_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ definiert durch $v_{j,n} = \delta_{j,n}$, d.h.

$$v_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots].$$

Zeigen Sie, dass die Folge schwach konvergiert und bestimmen Sie den schwachen Grenzwert.

Aufgabe 4. (i) Zeigen Sie, dass für $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ und alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

(ii) Beweisen Sie die Hölder'sche Ungleichung

$$\int_\Omega |uv| \,\mathrm{d}x \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}$$

für $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^q(\Omega)$ mit $1/p + 1/q = 1$.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^q(\Omega)} = 1$.

Abgabe: Bis Montag, den 16. Januar 2017, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).