Einführung in Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/17

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Sei $\Omega = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$ und definiere $u(x) = \log(\log(|x|))$. Zeigen Sie, dass $u \in W^{1,2}(\Omega)$ gilt, aber $u \notin L^\infty(\Omega)$ und $u \notin C(\Omega)$.
Hinweis: Für $F(r) = |\log(r)|^{-1}$ haben wir $F'(r) = 1/\log^2(r)$.

Aufgabe 2. (i) Sei $\mathrm{Lip}(\Omega)$ die Menge aller Lipschitzstetigen Funktionen auf Ω und es sei

$$\|u\|_{\mathrm{Lip}(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}$$

für $u \in \mathrm{Lip}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Lip}(\Omega)$ ein Banachraum ist.
(ii) Verwenden Sie den Satz von Arzelà–Ascoli, um zu zeigen, dass die Einbettung $\mathrm{Lip}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ kompakt ist.
Arzelá–Ascoli: Sei X ein kompakter topologischer Raum. Eine Teilmenge $F \subseteq C(X)$ ist genau dann präkompakt im Banachraum $C(X)$, wenn F gleichgradig stetig und punktweise beschränkt ist

Aufgabe 3. Sei $u \in C^3(\Omega)$. Zeigen Sie, dass gilt

$$|\Delta u|^2 - |D^2 u|^2 = \operatorname{div}\big(\nabla u \, \Delta u - \frac{1}{2}\nabla|\nabla u|^2\big).$$

Aufgabe 4. (i) Leiten Sie eine schwache Formulierung für das folgende Randwertproblem her:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_{\mathrm{D}} & \text{auf } \Gamma_{\mathrm{D}}, \\ (K\nabla u) \cdot n = g & \text{auf } \Gamma_{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

(ii) Spezifizieren Sie Bedingungen an die Koeffizienten, die die Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung $u \in H^1(\Omega)$ sicherstellen.

Abgabe: Bis Montag, den 23. Januar 2017, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).