Einführung in Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/17

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Sei $\Omega = (0,1)^2$ und für $j,k = 1,2,\dots,N$ definiere

$$\phi_{j,k}(x_1,x_2) = \sin(\pi x_1 j/N)\sin(\pi x_2 k/N)$$

Zudem sei $V_h = \operatorname{span}(\phi_{j,k} : j,k = 1,2,\dots,N)$. Berechnen Sie die Steifigkeitsmatrix für die zum Laplace-Operator gehörige bilineare Abbildung, d.h. die sich aus der schwachen Formulierung des Poissonproblems ergebende Bilinearform.

Aufgabe 2. Sei $w = (w_1,w_2,\dots,w_d) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ein polynomielles Vektorfeld vom Grad $m-1$ auf $\mathbb{R}^d$, und es sei angenommen, dass $w = \nabla v$ für eine Funktion $v \in C^1(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass v ein Polynom vom Grad m ist.

Aufgabe 3. Sei $T \equiv (z_0,z_1,\dots,z_d)$ ein Simplex mit positiv orientierten Knoten $z_0,z_1,\dots,z_d \in \mathbb{R}^d$ und definiere

$$X_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}.$$

Zeigen Sie, ausgehend von der Beweisskizze in Lemma 3.9, dass das Volumen $|T|$ gegeben ist durch $|T| = (1/d!)\det X_T$ und dass

$$[\nabla\varphi_{z_0}|_T,\dots,\nabla\varphi_{z_d}|_T]^\top = X_T^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ I_d \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit Knoten $\mathcal{N}_h$.
(i) Zeigen Sie, dass es für jedes $z \in \mathcal{N}_h$ eine eindeutige Funktion $\varphi_z \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ gibt mit $\varphi_z(y) = \delta_{zy}$ für alle $y \in \mathcal{N}_h$.
(ii) Zeigen Sie, dass die Familien $(\varphi_z : z \in \mathcal{N}_h)$ und $(\varphi_z : z \in \mathcal{N}_h \setminus \Gamma_{\mathrm{D}})$ Basen der Räume $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ und $\mathcal{S}^1_{\mathrm{D}}(\mathcal{T}_h)$ definieren.

Abgabe: Bis Montag, den 30. Januar 2017, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).