Einführung in Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/17

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 14
(unbewertet)

Aufgabe 1. Es sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Knotenpunkten $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ und es seien $z_3, z_4, z_5 \in \mathbb{R}^2$ die Mittelpunkte der Seiten von T.
(i) Zeigen Sie, dass $(T, \mathcal{P}_2(T), \mathcal{K})$ mit $\mathcal{K} = \{\chi_j : j = 0, 1, \ldots, 5\}$ für $\chi_j(\phi) = \phi(z_j)$, $j = 0, 1, \ldots, 5$, ein Finites Element ist.
(ii) Konstruieren Sie die duale Basis für das Finite Element $(T, \mathcal{P}_2(T), \mathcal{K})$.

Aufgabe 2. Sei $\omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitzgebiet.
Führen Sie einen konstruktiven Beweis für die Existenz einer Konstanten $c_P > 0$, so dass für alle $v \in H^1(\omega)$ mit

$$\int_\omega v \,\mathrm{d}x = 0$$

gilt, dass $\|v\|_{L^2(\omega)} \le c_P \|\nabla v\|_{L^2(\omega)}$.
Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz, um $v(x)$ als Integral über ω darzustellen.

Aufgabe 3. Es sei $\Phi_T : \widehat{T} \to T$ ein affiner Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass

$$D\Phi_T^{-1} = \big(D\Phi_T\big)^{-1}$$

und dass beide Matrizen unabhängig von $x \in T$ und $\widehat{x} \in \widehat{T}$ sind.

Aufgabe 4. Sei $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ eine Partition von $(0, 1)$. Zeigen Sie, dass der Raum kubischer Splines $\mathcal{S}^{3,2}(\mathcal{T}_h) \subset C^2([0, 1])$ keine affine Familie darstellt.

Abgabe: Bis Montag, den 6. Februar 2017, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).