Einführung in Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/17

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Die Konstruktion einer Lösung mit Hilfe der sogenannten *Trennung der Variablen* besteht darin, Funktionen der Form $u_n(t,x) = v_n(t)w_n(x)$ zu finden, die die Wärmeleitungsgleichung samt der vorgeschriebenen Randbedingungen lösen. Eine Lösung des Anfangsrandwertproblems kann dann durch Bestimmung der Koeffizienten $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gewonnen werden, so dass

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n(t) w_n(x)$$

in geeigneter Weise konvergiert und die Bedingung $u(0,x) = u_0(x)$ erfüllt.
(i) Konstruieren Sie Paare (v_n, w_n), so dass $u_n(t,x) = v_n(t)w_n(x)$ die Gleichungen $\partial_t u_n - \partial_x^2 u_n = 0$ in $(0,T) \times (0,1)$ und $u_n(t,0) = u_n(t,1) = 0$ für alle $t \in (0,T)$ erfüllt.
(ii) Nehmen Sie an, dass die Funktion $u_0 \in C([0,1])$ gegeben ist durch

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin(n\pi x).$$

Bestimmen Sie die Lösung des zugehörigen Anfangsrandwertproblems der Wärmeleitungsgleichung. *Bemerkung:* Es kann gezeigt werden, dass jede Funktion $u_0 \in C([0,1])$ in der beschriebenen Weise dargestellt werden kann.

Aufgabe 2. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Bandmatrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & b & a \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A die Eigenwerte $\lambda_p = a + 2b\cos(p\pi/(n+1))$, $p = 1, 2, \ldots, n$ besitzt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenvektoren $v_p \in \mathbb{R}^n$ für $a = 0$ durch $v_{p,j} = \sin(pj\pi/(n+1))$, $j = 1, 2, \ldots, n$ gegeben sind.

Aufgabe 3. Zeigen Sie mit Hilfe der Fourier-Stabilitätsanalyse am Beispiel

$$\partial_t^+ U_j^k + a\widehat{\partial_x} U_j^k = 0,$$

dass die CFL-Bedingung kein hinreichendes Kriterium für die Stabilität eines Verfahrens ist.

Aufgabe 4. Sei $g \in C([-\pi,\pi])$ und es gelte

$$\int_{-\pi}^{\pi} |fg| \,\mathrm{d}x \le \int_{-\pi}^{\pi} |f| \,\mathrm{d}x$$

für alle $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Zeigen Sie, dass $|g(x)| \le 1$ für alle $x \in [-\pi,\pi]$. Reicht es aus, anzunehmen, dass $g \in L^2(-\pi,\pi)$?

Abgabe: Bis Montag, den 31. Oktober 2016, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).