Einführung in Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/17

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei $u \in C^2([0,T] \times [0,1])$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ mit homogenenen Dirichlet-Randbedingungen. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^1 \big(\partial_x u(t,x)\big)^2 \,\mathrm{d}x \leq 0$$

und folgern Sie die Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet-Randbedingungen.

Aufgabe 2. Für $J \in \mathbb{N}$ seien $\Delta x = 1/J$ und $V, W \in \mathbb{R}^{J+1}$.
(i) Beweisen Sie die diskrete Produktregel

$$\partial_x^-(W_j V_j) = W_j(\partial_x^- V_j) + (\partial_x^+ W_{j-1})V_{j-1}.$$

(ii) Leiten Sie die Formel für partielle Summation her, das heißt die Identität

$$\Delta x \sum_{j=0}^{J-1}(\partial_x^+ W_j)V_j = -\Delta x \sum_{j=1}^{J} W_j(\partial_x^- V_j) + W_J V_J - W_0 V_0,$$

und erläutern Sie deren Beziehung zur Formel für partielle Integration.

Aufgabe 3. (i) Zeigen Sie formal, dass

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|^2/(4t)} u_0(y) \,\mathrm{d}y$$

die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ in $(0,T) \times \mathbb{R}$ für jedes $T > 0$ löst.
(ii) Erläutern Sie, warum man erwarten kann, dass $u(t,x) \to u_0(x)$ für $t \to 0$, z.B. für stückweise konstante Anfangsdaten u_0 und $x = 0$, gilt.
(iii) Sei $u_0(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $u_0(x) = 0$ für $x < 0$. Zeigen Sie, dass $u(t,x)$ positiv ist für alle $t \in (0,T)$ und $x \in \mathbb{R}$, und folgern Sie, dass Information sich mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreitet.
(iv) Wie muss die Formel in (i) modifiziert werden, um eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = 0$ darzustellen?

Aufgabe 4.
(i) Zeigen Sie, dass die θ-Methode wohldefiniert ist für jede Wahl von θ und jede Wahl von Δt, $\Delta x > 0$.
(ii) Zeigen Sie, dass die θ-Methode für $\theta < 1/2$ nicht stabil ist und $\lambda = \Delta t/\Delta x^2 > 1/2$.

Abgabe: Bis Montag, den 7. November 2016, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).