Einführung in Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/17

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (i) Bestimmen Sie Funktionen $u_n(t,x) = v_n(t)w_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, die die Wellengleichung in $(0,T) \times (0,1)$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen erfüllen.
(ii) Nehmen Sie an, dass $u_0, v_0 \in C([0,1])$ die Darstellung

$$u_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \sin(n\pi x), \quad v_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \sin(n\pi x)$$

zu gegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzen. Leiten Sie eine Darstellungsformel für die Lösung der Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0$ in $(0,T) \times (0,1)$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen und Anfangsdaten $u(0,x) = u_0(x)$, $\partial_t u(0,x) = v_0(x)$ für alle $x \in [0,1]$ her.

Aufgabe 2. Sei $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, die für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ die folgende Rekursion erfüllen:

$$\begin{bmatrix} \xi_k \\ \xi_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_{k-1} \\ \xi_k \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass ein $c > 0$ existiert, so dass $|\xi_k| \le c$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, falls für die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ von A gilt, dass $|\lambda_i| < 1$, $i = 1,2$.
(ii) Zeigen Sie, dass im Fall gleicher Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ von A mit $|\lambda_i| = 1$, $i = 1,2$, oder falls $\max_{i=1,2} |\lambda_i| > 1$, unbeschränkte Folgen $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ existieren, die die Rekursionsgleichung erfüllen.

Aufgabe 3. Sei $J \in \mathbb{N}$ und $\Delta x = 1/J$. Die Vektoren $\varphi_p \in \mathbb{R}^{J+1}$, $p = 1, \dots, J-1$, gegeben durch $\varphi_{p,j} = \sqrt{2}\sin(\pi p j \Delta x)$, $j = 0, 1, \dots, J$, definieren eine Orthonormalbasis des Raums $\ell^2_{0,\Delta x} = \{V \in \mathbb{R}^{J+1} : V_0 = V_J = 0\}$ bezüglich des inneren Produkts $(V,W)_{\Delta x} = \Delta x \sum_{j=0}^{J} V_j W_j$.
(i) Zeigen Sie, dass die Vektoren φ_p Eigenvektoren des Operators $-\partial_x^+\partial_x^- : \mathbb{R}^{J+1} \to \mathbb{R}^{J+1}$ zu den Eigenwerten $\sigma_p = \frac{2}{\Delta x^2}(1 - \cos(\pi p \Delta x))$ sind, der durch

$$\big(-\partial_x^+\partial_x^- V\big)_j = \begin{cases} 0 & \text{for } j = 0,\ J, \\ -\partial_x^+\partial_x^- V_j & \text{for } j = 1, 2, \dots, J-1. \end{cases}$$

definiert ist. *Hinweis:* Verwenden Sie die Tatsache, dass $\varphi_{p,j} = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}(\omega^{pj})$ mit $\omega = e^{\mathrm{i}\pi\Delta x}$.
(ii) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte $\widetilde{\sigma}_p$ des eindimensionalen kontinuierlichen Laplace-Operators $-\partial_x\partial_x$ zu den Eigenfunktionen $\widetilde{\varphi}_p(x) = \sin(\pi p x)$ bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ durch die Eigenwerte des oben definierten diskreten Operators approximiert werden.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass das implizite Differenzenverfahren für die Wellengleichung einen Konsistenzfehler der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ besitzt.

Abgabe: Bis Montag, den 14. November 2016, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).