

# Einführung in Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/17

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels

Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

## Übungsblatt 5

**Aufgabe 1.** Leiten Sie ein mathematisches Modell für einen Diffusionsprozess her, der Senken und Quellen der sich verteilenden Substanz enthält, welche durch eine Funktion  $f \in C([0, T] \times [0, 1])$  beschrieben werden.

**Aufgabe 2.** Die Wellengleichung  $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$  kann als System  $\partial_t u = v$ ,  $\partial_t v = \partial_x^2 u$  geschrieben werden. Diskretisieren Sie dieses System mit Hilfe von Rückwärts-Differenzenquotienten in der Zeit und einem zentralen Differenzenquotienten im Ort und analysieren Sie die Stabilität des resultierenden Verfahrens.

**Aufgabe 3.** (i) Betrachten Sie die Wellengleichung  $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$  in  $(0, T) \times \mathbb{R}_{>0}$  hinsichtlich der Randbedingung  $u(t, 0) = 0$  für alle  $t \in (0, T)$ . Verwenden Sie die Formel von D'Alembert um die Lösung zu den Anfangsbedingungen  $u(0, x) = u_0(x)$  und  $\partial_t u(0, x) = 0$  für  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  darzustellen, wobei  $u_0(0) = 0$  mit  $u_0 \in C(\mathbb{R}_{\geq 0})$ .

(ii) Bestimmen Sie die Lösung für  $u_0(x) = \max\{0, 1 - |x - 2|\}$  und skizzieren Sie diese für  $t = 0, 5/6, 2, 7/3, 15/6$ .

**Aufgabe 4.** Sei  $J \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta x = 1/J$ , und  $(U_j^k) \in \mathbb{R}^{(K+1) \times (J+1)}$ . Beweisen Sie die Identitäten

$$(\partial_t^+ \partial_t^- U_j^k)(\widehat{\partial}_t U_j^k) = \frac{1}{2} \partial_t^- (U_j^k)^2,$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{c^2}{4} \partial_x^+ \partial_x^- (U_j^{k+1} + 2U_j^k + U_j^{k-1})(\widehat{\partial}_t U_j^k) \\ &= \frac{c^2}{2\Delta t} (\partial_x^+ \partial_x^- (U_j^{k+1/2} + U_j^{k-1/2}))(U_j^{k+1/2} - U_j^{k-1/2}), \end{aligned}$$

für  $1 \leq j \leq J - 1$  und  $1 \leq k \leq K - 1$ , wobei  $U_j^{k\pm 1/2} = (U_j^k + U_j^{k\pm 1})/2$ .

**Abgabe:** Bis Montag, den 21. November 2016, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).