Einführung in Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/17

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Seien $\Omega = (0,1)^2$ und $f \in C(\overline{\Omega})$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \sum_{m,n \in \mathbb{N}} \alpha_{m,n} \sin(m\pi x_1)\sin(n\pi x_2).$$

Berechnen Sie $-\Delta u_{m,n}$ für $u_{m,n}(x_1,x_2) = \sin(\pi m x_1)\sin(\pi n x_2)$ und konstruieren Sie die Lösung des Poissonproblems $-\Delta u = f$ in Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$.

Aufgabe 2. (i) Benutzen Sie den Gauss'schen Satz um zu zeigen, dass für $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ folgendes gilt:

$$\int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n \,\mathrm{d}s = \int_\Omega \big(\nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u\big)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_\Omega \big(u\Delta v - v\Delta u\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \big(u\nabla v \cdot n - v \nabla u \cdot n\big)\,\mathrm{d}s.$$

(ii) Seien $u_1, u_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ Lösungen des Randwertproblems $-\Delta u = f$ in Ω und $u = 0$ in $\partial\Omega$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \,\mathrm{d}x = 0$$

und folgern Sie $u_1 = u_2$.

Aufgabe 3. Wir betrachten ein ringförmiges Schwimmbecken und nehmen an, dass die stationäre Temperaturverteilung unabhängig von der vertikalen Richtung ist. Zudem nehmen wir an, dass die Temperatur am Rand vorgeschrieben ist. Wir betrachten also das zweidimensionale Randwertproblem

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega = B_{r_2}(0) \setminus \overline{B_{r_1}(0)}, \quad u = u_1 \text{ auf } \partial B_{r_1}(0), \quad u = u_2 \text{ auf } \partial B_{r_2}(0)$$

für gegebene reelle Zahlen $0 < r_1 < r_2$ und $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.
(i) Zeigen Sie, dass für $g \in C^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ und $r(x_1,x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, gilt, dass

$$\Delta(g \circ r) = g''(r) + r^{-1}g'(r) = r^{-1}\big(rg'(r)\big)'.$$

(ii) Rechtfertigen Sie die Annahme $u = \widetilde{u} \circ r$ und lösen Sie das Poissonproblem für das Schwimmbecken mit $r_1 = 10$, $r_2 = 20$, und $u_1 = 20$, $u_2 = 40$.
(iii) In welchem Radius muss man schwimmen, um von Wasser der Temperatur 30°C umgeben zu sein?

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Systemmatrix, die bei der Diskretisierung des Poissonproblems entsteht. Benutzen Sie das diskrete Maximumsprinzip um zu zeigen, dass für die Matrix $B = A^{-1}$ gilt, dass $b_{ij} \geq 0$, $i,j = 1,2,\ldots,n$.

Abgabe: Bis Montag, den 28. November 2016, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).