Einführung in Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/17

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass die Ungleichung $-\Delta u \leq 0$ ausreicht, um das Maximumprinzip $\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \leq \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$ zu beweisen.
(ii) Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ Lösung von $-\Delta u = f$ in Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Wenden Sie das Maximumprinzip auf eine geeignet definierte Funktion $v = u + \|f\|_{C(\overline{\Omega})} w$ an, um zu beweisen, dass

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \max_{x\in\partial\Omega} \frac{|x|^2}{2d} \|f\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Ist es möglich, diese Abschätzung zu verbessern?

Aufgabe 2. Sei $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein quadratisches Polynom und $\Delta x = 1/J$ für ein $J \in \mathbb{N}$. Für $j, m \in \mathbb{Z}^2$, sei $x_{j,m} = (j,m)\Delta x$ und $W_{j,m} = w(x_{j,m})$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta_h W_{j,m} = \partial_{x_1}^+ \partial_{x_1}^- W_{j,m} + \partial_{x_2}^+ \partial_{x_2}^- W_{j,m} = \Delta w(x_{j,m})$$

für alle $j, m \in \mathbb{Z}^2$.

Aufgabe 3. (i) Sei $L > 1$ und es gelte für $\alpha_\ell, p_\ell \in \mathbb{R}$, $0 \leq \ell \leq L$, dass $\alpha_\ell < 0$ for $\ell = 1, 2, \ldots, L$, und

$$\sum_{\ell=0}^{L} \alpha_\ell \geq 0, \quad \sum_{\ell=0}^{L} \alpha_\ell p_\ell \leq 0.$$

Es gelte außerdem $p_0 \geq 0$ oder $\sum_{\ell=0}^{L} \alpha_\ell = 0$. Zeigen Sie, dass $p_0 \geq \max_{1\leq\ell\leq L} p_\ell$ impliziert, dass $p_0 = p_1 = \cdots = p_L$.
(ii) Sei $(U_{j,m})_{0\leq j,m\leq J}$ die Finite-Differenzen-Approximation des Poisson-Problems $-\Delta u = f$ in $\Omega = (0,1)^2$ und $u = u_{\mathrm{D}}$ auf $\partial\Omega$. Nehmen Sie an, dass $f \leq 0$ und zeigen Sie, dass

$$\max_{1\leq j,m\leq J-1} U_{j,m} \leq \max_{x_{j,m}\in\partial\Omega} u_{\mathrm{D}}(x_{j,m}).$$

Aufgabe 4. Stellen Sie das Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung als abstraktes Randwertproblem $F(u) = 0$ in U und $G(u) = 0$ auf ∂U dar, indem Sie geeignete Abbildungen F und G definieren.

Abgabe: Bis Montag, den 5. Dezember 2016, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).