Einführung in Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/17

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. (i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, und $f \in C(\overline{U})$. Die Funktion $u \in C^2(\overline{U})$ erfülle

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{z_i}\partial_{z_j}u(z) + \sum_{j=1}^{n} b_j\partial_{z_j}u(z) + c\,u(z) = f(z)$$

für alle $z \in U$. Nehmen Sie an, dass $A = Q^\top \Lambda Q$ diagonalisierbar ist und definieren Sie $\widetilde{u}(\xi) = u(Q\xi)$. Bestimmen Sie die partielle Differenzialgleichung die von $\widetilde{u}$ erfüllt wird.
(ii) Bestimmen Sie den Typ folgender partieller Differenzialgleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \Delta u = f \quad & \text{in } (0,T)\times\Omega \subset \mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^d, \\ \partial_{x_1}^2 u - 3\partial_{x_1}\partial_{x_2}u + \partial_{x_2}^2 u = 0 \quad & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \partial_t u - \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2} u = f \quad & \text{in } (0,T)\times\Omega \subset \mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Für $u \in C^2([0,1]^2)$ und Gitterpunkte $x_{j,m} = (j,m)\Delta x$, $0 \leq j,m \leq J$, mit $\Delta x = 1/J$, definieren wir den Interpolanten von u durch

$$\mathcal{I}_h u = \big(u(x_{j,m})\big)_{0\leq j,m\leq J} \in \mathbb{R}^{(J+1)^2}.$$

Zeigen Sie, dass mit der Norm $\|V\|_\infty = \max_{0\leq j,m\leq J}|V_{j,m}|$ auf $\mathbb{R}^{(J+1)^2}$, für $\Delta x \to 0$ gilt, dass

$$\|\mathcal{I}_h u\|_\infty \to \|u\|_{C([0,1]^2)}.$$

Aufgabe 3. Sei $\Omega = (0,L)$ die eindimensionale Darstellung eines Flussabschnitts, in dem Wasser mit der konstanten Geschwindigkeit $a > 0$ fließt. Wir betrachten nun die Konzentration $u(t,x)$ eines Schadstoffs, der zum Zeitpunkt $t = 0$ in den Fluss gelangt und sich durch Diffusion und Transport ausbreitet.
(i) Leiten Sie eine partielle Differenzialgleichung her, die diesen Vorgang beschreibt. Verwenden Sie dazu das Fick'sche Gesetz $q = -c\nabla u$, wobei c der (hier konstante) Diffusionskoeffizient des Schadstoffs in Wasser sei und benutzen Sie den Satz von Gauß.
(ii) Es sei $L = 1\,\mathrm{m}$ die Länge des Flussabschnitts, $a = 12\,\mathrm{m}/s$ die Geschwindigkeit des Wassers und $c = 4\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^2/s$ der Diffusionskoeffizient von Blei. Überprüfen Sie, dass $u(t,x) = (e^{\frac{a}{c}} - e^{\frac{ax}{c}})/(e^{\frac{a}{c}} - 1)$ eine stationäre Lösung zu den Randbedingungen $u(t,0) = 1, u(t,1) = 0$ beschreibt und interpretieren Sie diesen Sachverhalt für die gegebenen Werte.

Aufgabe 4. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $u \in C^2(\Omega)$, sei $\widetilde{u}(r,\phi) = u(r\cos\phi, r\sin\phi)$.
(i) Zeigen Sie, dass

$$\nabla u(r\cos\phi, r\sin\phi) = [\partial_r\widetilde{u}(r,\phi), r^{-1}\partial_\phi\widetilde{u}(r,\phi)]^\top$$

und

$$\Delta u(r\cos\phi, r\sin\phi) = \partial_r^2\widetilde{u}(r,\phi) + r^{-1}\widetilde{u}(r,\phi) + r^{-2}\partial_\phi^2\widetilde{u}(r,\phi).$$

(ii) Verifizieren Sie, dass die Funktion $u(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x|$ harmonisch ist.

Abgabe: Bis Montag, den 12. Dezember 2016, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).