Einführung in Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen

Wintersemester 2016/17

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ sei $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, d.h. für jedes $z \in U$ existiert ein $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, so dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0),$$

wobei $h \to 0$ eine Folge von komplexen Zahlen darstellt, die gegen Null konvergiert. Zeigen Sie, dass die Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ die Gleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

in U erfüllen und dass sie harmonisch sind, d.h. es gilt $-\Delta u = 0$ und $-\Delta v = 0$ in U.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass das Funktional

$$I(v) = \int_{-1}^{1} x^2 \big(v'(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x$$

keinen Minimierer in $C^1((-1, 1))$ hat bezüglich der Randbedingungen $v(-1) = -1$ und $v(1) = 1$.

Aufgabe 3. Es sei $F_h(U_h) = L_h U_h - \ell_h$ eine Diskretisierung eines linearen Randwertproblems, welche beschränkt und konvergent sei derart, dass die Abschätzungen

$$\|LV_h\|_{r,N_h} \le c_1 \|V_h\|_{\ell,N_h},$$
$$\|\mathcal{I}_h u - U_h\|_{\ell,N_h} \le c_2 h^\alpha \|u\|_{C^{k+s}(\overline{U})},$$

für jedes $V_h \in \mathbb{R}^{N_h}$ gelten und es stetige und diskrete Lösungen $u \in C^{k+s}(\overline{U})$ und $U_h \in \mathbb{R}^{N_h}$ gibt. Zeigen Sie, dass das numerische Verfahren konsistent von der Ordnung α ist.

Aufgabe 4. Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass Konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren mit

$$F(z) \ge c_1 |z| - c_2.$$

Unter der Annahme, dass F schwach unterhalbstetig ist, d.h. wenn $z_j \to z$ für $j \to \infty$, dann gilt $F(z) \le \liminf_{j\to\infty} F(z_j)$. Zeigen Sie, dass F einen globalen Minimierer besitzt und geben Sie eine Beispielfunktion F an, die diese Bedingungen erfüllt, aber nicht stetig ist.

Abgabe: Bis Montag, den 19. Dezember 2016, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).