Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen I

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Marijo Milicevic

Übungsblatt 1

Abgabe am **Montag, den 23.10.2017**

Aufgabe 1 (Lagrange-Multiplikatoren, 10 Punkte)
Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv-definite Matrix, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $f \in \mathbb{R}^n$ und $g \in \mathbb{R}^m$. Wir definieren die Funktion $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $E(x) := \frac{1}{2}x^T Ax - f^T x$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gilt $Bx_0 = g$ mit $E(x_0) = \inf\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ Bx=g}} E(x)$.

(ii) Es existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$, sodass $\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}$ eine Lösung von $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ ist.

(iii) Es gilt $Bx_0 = g$ mit $E(x_0) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^m} E(x) + \lambda^T(Bx - g)$.

Aufgabe 2 (Konditionszahl, 10 Punkte)
Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\|\cdot\|_\ell$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ mit dualer Norm $\|z\|_{\ell'} = \sup z^T y/\|y\|_\ell$. Zeigen Sie, dass $k \geq 0$ genau dann die kleinste Konstante ist mit $x^T My \leq k\|x\|_\ell\|y\|_\ell$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, wenn $k = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|Mx\|_{\ell'}/\|x\|_\ell$ gilt.

Aufgabe 3 (Stetigkeit von Bilinearformen, 10 Punkte)
Seien X und Y Banachräume und $\Gamma : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, d.h. $\Gamma(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1\Gamma(x_1, y) + \lambda_2\Gamma(x_2, y)$ und $\Gamma(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1\Gamma(x, y_1) + \lambda_2\Gamma(x, y_2)$.

a) Zeigen Sie, dass Γ stetig ist genau dann, wenn ein $c > 0$ existiert mit $\Gamma(x, y) \leq c\|x\|_X\|y\|_Y$.

b) Es bezeichne Y' den Raum aller stetigen linearen Abbildungen $\phi : Y \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass Γ stetig ist genau dann, wenn die Abbildung $L : X \to Y'$, $x \mapsto \Big(\langle Lx, y\rangle := \Gamma(x, y)\Big)$, wohldefiniert und stetig ist.

Aufgabe 4 (Symmetrische positiv-semidefinite Matrizen, 10 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv-semidefinit, d.h. $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$(y^T Ax)^2 \leq (x^T Ax)(y^T Ay)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Folgern Sie, dass $x^T Ax = 0$ impliziert, dass $x \in \ker(A)$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die positive Semidefinitheit für den Vektor $x + \lambda y$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.