# Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen I

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Marijo Milicevic

## Übungsblatt 10

Abgabe am **Montag, den 08.01.2018**

**Aufgabe 1 (Taylor-Hood-Element - Teil I, 10 Punkte)**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{T}_h$ eine reguläre Triangulierung in $d$-Simplizes so, dass für jedes $T \in \mathcal{T}_h$ höchstens eine Seite auf $\partial\Omega$ liegt. Für eine Kante $E = \operatorname{conv}\{z_1, z_2\}$ sei $h_E = |z_2 - z_1|$ ihre Länge, $\omega_E$ der zugehörige Kantenpatch und $t_E = (z_2 - z_1)/h_E$ ihr normierter Tangentialvektor. Für $p_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ sei dann $\partial_E p_h = (p_h(z_2) - p_h(z_1))/h_E$ ihre Tangentialableitung entlang $E$.

$(i)$ Zeigen Sie, dass $\nabla p_h|_T \cdot t_E = \partial_E p_h$ für jedes $T \subset \omega_E$.

$(ii)$ Zeigen Sie, dass eine von $h$ unabhängige Konstante $c > 0$ existiert mit

$$\left[\sum_{E \in \mathcal{E}_h \setminus \partial\Omega} h_E^2 |\partial_E p_h|^2 |\omega_E|\right]^{1/2} \geq c \|h_\mathcal{T} \nabla p_h\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, p_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \cap L_0^2(\Omega).$$

**Aufgabe 2 (Multiple Choice, 10 Punkte)**
Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Antwort begründen können.

a) Jedes diskrete konvexe Minimierungsproblem hat eine Lösung.

b) Die Inf-Sup-Bedingung beschränkt die Operatornorm der Linksinversen einer linearen Abbildung.

c) Wenn $L : X \to X'$ selbstadjungiert ist, d.h. $L' = L$, dann folgt aus der Inf-Sup-Bedingung für $\Gamma$ direkt ihre Nicht-Degeneriertheit.

d) Jeder injektive, lineare und beschränkte Operator, der eine beschränkte Linksinverse besitzt, hat ein abgeschlossenes Bild.

e) Eine in $h$ gleichmäßige Inf-Sup-Bedingung bedeutet, dass die Konstanten $\gamma_h$ größer als Null sind für jedes $h$.

f) Sei $(V_h, Q_h)_h$ eine Familie von Finite-Elemente-Räumen mit $V_h \subset V$, $Q_h \subset Q$ und Banachräumen $V$ und $Q$. Für $b : V \times Q \to \mathbb{R}$ sei $K_h := \{v_h \in V_h : b(v_h, q_h) = 0 \quad \forall\, q_h \in Q_h\}$. Dann ist $K_h \subset \ker B$.

g) Da jede Funktion $v \in \mathcal{RT}^0(\mathcal{T}_h)$ lokal gegeben ist durch $v_T = a_T + b_T x$ für $T \in \mathcal{T}_h$, wobei $a_T \in \mathbb{R}^2$ und $b_T \in \mathbb{R}$, gilt $\dim \mathcal{RT}^0(\mathcal{T}_h) = 3|\mathcal{T}_h|$.

h) Falls $b : V \times Q \to \mathbb{R}$ eine Inf-Sup-Bedingung erfüllt und $\mathcal{I}_F : V \to V_h$ die Gleichung $b(v - \mathcal{I}_F v, q) = 0$ für alle $q \in Q$ erfüllt, dann erfüllt $b$ auch eine diskrete Inf-Sup-Bedingung.

i) Das MINI-Element erfüllt eine Inf-Sup-Bedingung für das Stokes-Problem, falls $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ konvex ist und $\Gamma_D = \partial\Omega$.

j) Die $P_1$-$P_1$-Methode definiert eine stabile nichtkonforme Diskretisierung des Stokes-Problems.

**Aufgabe 3 (Nichtkonforme Methoden, 10 Punkte)**

Sei $X$ ein Hilbertraum und $X_h$ ein endlichdimensionaler Vektorraum. Seien $a(\cdot,\cdot)$ und $a_h(\cdot,\cdot)$ stetige, symmetrische und positiv-definite Bilinearformen auf $X$ bzw. $X + X_h$ so, dass $a_h(\cdot,\cdot) \equiv a(\cdot,\cdot)$ auf $X$, und sei $\ell \in X' \cap X_h'$. Seien $u \in X$ und $u_h \in X_h$ derart, dass

$$a(u,v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in X, \quad a_h(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \text{für alle } v_h \in X_h.$$

Weiter sei $\|\cdot\|_h = a_h(\cdot,\cdot)^{1/2}$ die von $a_h$ induzierte Norm auf $X_h$. Zeigen Sie, dass

$$\|u - u_h\|_h \leq \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in X_h} \frac{|a_h(u - u_h, w_h)|}{\|w_h\|_h}.$$

**Aufgabe 4 (Schornsteinqualm, 10 Punkte)**

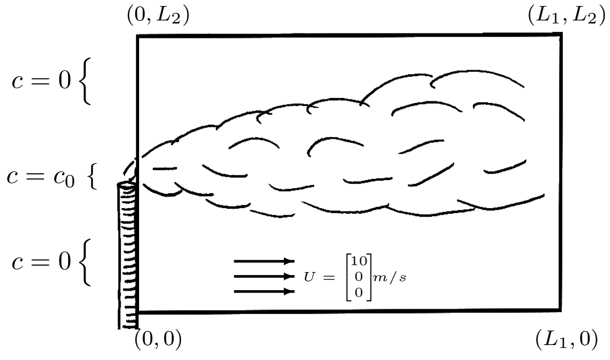
Sei $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2) \times (-L_3, L_3)$ und $U = 10\frac{m}{s}[1,0,0]^T$ sei das Geschwindigkeitsfeld des Windes in $\Omega$. Der Qualm wird im Punkt $(0, h_{ch}, 0)$ ausgestoßen, wobei $h_{ch}$ die Höhe des Schornsteins bezeichne. Wir möchten die Konzentration $c : (0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ des Rauchs modellieren. Als Maßeinheit verwenden wir $[c] = \frac{g}{m^3}$. Leiten Sie für ein Kontrollvolumen $\omega \subset \Omega$, $t > 0$ und $\Delta t$ hinreichend klein die Identität

$$\int_\omega c(t + \Delta t, x + U\Delta t)\, \mathrm{d}x = \int_\omega c(t,x)\, \mathrm{d}x - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial\omega} q(\tau, s) \cdot n(s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\tau$$

her. Hierbei sei $q$ der Fluss des Qualms, d.h. die Größe $q \cdot n$ beschreibt die Menge an Partikeln, die pro Zeiteinheit durch ein Flächenelement mit Einheitsnormalenvektor $n$ fließt. Verwenden Sie das Fick'sche Gesetz, d.h. die Beziehung $q = -\nu \nabla c$, wobei $\nu = 1{,}5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$ den Diffusionskoeffizienten von Kohlenstoffdioxid bezeichne, und partielle Integration, um eine Konvektions-Diffusions-Gleichung herzuleiten. Entdimensionalisieren Sie die erhaltene Gleichung und erklären Sie, weshalb es sich um einen konvektionsdominierten Vorgang handelt. Wir erhalten durch die Definition der neuen Variable

$$\bar{c}(x_1, x_2) := \int_{-L_3}^{L_3} c(x_1, x_2, x_3)\, \mathrm{d}x_3$$

ein zweidimensionales Problem. Überlegen Sie sich geeignete Randbedinungen auf $\partial\Omega$. Warum ist es gerechtfertigt, die Identität $c(t + \Delta t, x) = c(t, x)$ für $x \in \Omega$ und $t \in (0, \infty)$ anzunehmen, um das stationäre Problem $-\nu\Delta c + U \cdot \nabla c = 0$ herzuleiten?




**Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2018!**