Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen I

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Marijo Milicevic

Übungsblatt 11

Abgabe am **Montag, den 15.01.2018**

Aufgabe 1 (Taylor-Hood-Element - Teil II, 10 Punkte)
Wir übernehmen die Voraussetzungen und die Notation von Blatt 10, Aufgabe 1, und setzen $V_h = \mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_h)^d$ und $Q_h = \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \cap L_0^2(\Omega)$. Für eine Kante $E = \operatorname{conv}\{z_1, z_2\}$ sei $b_E = \varphi_{z_1}\varphi_{z_2}$, wobei φ_{z_1},φ_{z_2} die nodalen Basisfunktionen bezeichnen.

(*i*) Zeigen Sie, dass $\operatorname{supp}(b_E) \subset \omega_E$ und $b_E \in \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h)$. Zeigen Sie außerdem, dass für $v_h := \sum_{E\in\mathcal{E}_h} \alpha_E t_E b_E$ mit $\alpha_E \in \mathbb{R}$ und $\alpha_E = 0$ für $E \subset \partial\Omega$ gilt, dass $v_h \in \mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_h)^d$.

(*ii*) Definieren Sie für ein gegebenes $p_h \in Q_h$ geeignete Koeffizienten α_E um zu zeigen, dass

$$\sup_{v_h\in V_h\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega v_h \cdot \nabla p_h \,\mathrm{d}x}{\|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}} \geq c_2' \left[\sum_{E\in\mathcal{E}_h\setminus\partial\Omega} h_E^2 |\partial_E p_h|^2 |\omega_E| \right]^{1/2} \quad \forall\, p_h \in Q_h.$$

Folgern Sie, dass

$$\sup_{v_h\in V_h\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega p_h \operatorname{div} v_h \,\mathrm{d}x}{\|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}} \geq c_2 \|h_\mathcal{T} \nabla p_h\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, p_h \in Q_h.$$

(*iii*) Folgern Sie aus der gestörten Inf-Sup-Bedingung für das Paar $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)^d \times (\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \cap L_0^2(\Omega))$ die gestörte Inf-Sup-Bedingung

$$\sup_{v_h\in V_h\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega p_h \operatorname{div} v_h \,\mathrm{d}x}{\|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}} \geq \beta' \|p_h\|_{L^2(\Omega)} - c_1 \|h_\mathcal{T} \nabla p_h\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, p_h \in Q_h$$

für das Paar $V_h \times Q_h$. Leiten Sie daraus schließlich ab, dass ein β existiert mit

$$\sup_{v_h\in V_h\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega p_h \operatorname{div} v_h \,\mathrm{d}x}{\|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}} \geq \beta \|p_h\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, p_h \in Q_h.$$

Aufgabe 2 (Locking-Effekt, 10 Punkte)
Seien $\Omega = (0,1)^2$ und $\mathcal{T}$ eine uniforme Triangulierung von Ω in halbierte Quadrate mit Diagonalen parallel zum Vektor $[1,1]^T$.

(*i*) Sei $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})^2$ so, dass $\operatorname{div} u_h = 0$. Zeigen Sie, dass dann $u_h = 0$ in Ω gelten muss.

(ii) Folgern Sie aus Teilaufgabe (i), dass $\|\operatorname{div}\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ eine Norm auf $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})^2$ definiert und daher ein $C(h) > 0$ existiert mit $\|\operatorname{div} v_h\|_{L^2(\Omega)} \geq C(h)\|v_h\|_{L^2(\Omega)}$ für alle $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})^2$, und zeigen Sie, dass $C(h) \leq ch$ für h hinreichend klein mit einer von h unabhängigen Konstante $c > 0$ gelten muss.

Aufgabe 3 (Drei-Term-Rekursion, 10 Punkte)
Es seien die Gitterpunkte $x_i = i/M$, $i = 0, \ldots, M$, gegeben. Wir betrachten für $a, b \in \mathbb{R}$ das System

$$\begin{aligned} -\varepsilon\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} + \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} &= 0, \quad i = 1, \ldots, M-1, \\ U_0 = a,\ U_M &= b, \end{aligned}$$

wobei $h := 1/M$. Schreiben Sie das System in der Form $\widehat{U}_{i+1} = A\widehat{U}_i$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\widehat{U}_{i+1} := [U_{i+1}, U_i]^T$. Konstruieren Sie die Lösung in Form der Eigenwerte von A.

Aufgabe 4 (Maximumprinzip für Konvektions-Diffusions-Gleichungen, 10 Punkte)
Seien $b \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d) \cap H_N(\operatorname{div}; \Omega)$ mit $\operatorname{div} b = 0$ und $u_D \in C(\partial\Omega)$. Betrachte die Gleichung

$$-\varepsilon\Delta u + b \cdot \nabla u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = u_D.$$

(i) Betrachten Sie $\widetilde{u} = \min\{u, c\}$ für eine geeignete Wahl von $c \in \mathbb{R}$ um zu zeigen, dass $u(x) \leq \max_{y\in\partial\Omega} u_D(y)$ für jedes beliebige $x \in \Omega$ gilt.

(ii) Beweisen Sie, dass $\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\varepsilon^{-2}$ gilt, sofern das Poisson-Problem H^2-regulär ist.