Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen I

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Marijo Milicevic

Übungsblatt 12

Abgabe am **Montag, den 22.01.2018**

Aufgabe 1 (Konvektionsterme, 10 Punkte)
Sei $b \in H_N(\mathrm{div};\Omega) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ mit $\mathrm{div}\, b = 0$. Zeigen Sie, dass für $u, v \in H^1_D(\Omega)$ die Bilinearform

$$c(u,v) = \int_\Omega b \cdot (\nabla u) v \,\mathrm{d}x$$

beschränkt und schiefsymmetrisch ist.

Aufgabe 2 (Voronoi-Diagramm, 10 Punkte)

(i) Konstruieren Sie das zu den in Abbildung 1 abgebildeten Punkten $(x_j)_{j=1,\dots,8} \subset \overline{\Omega} := [0,5] \times [0,2]$ assoziierte Voronoi-Diagramm.

(ii) Diskutieren Sie die Regularität des Diagramms.

(iii) Konstruieren Sie die Delauney-Triangulierung des Voronoi-Diagramms aus (i) und überprüfen Sie die schwache Spitzwinkeleigenschaft.

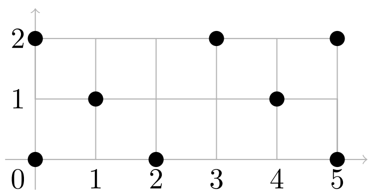

Abbildung 1

Aufgabe 3 (Sprung und Mittelwert von Sobolevfunktionen, 10 Punkte)

(i) Sei $v \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass für jede innere Kante $S \in \mathcal{S}_h$

$$[\![v]\!]|_S = 0 \quad \text{und} \quad \{v\}|_S = v|_S$$

gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass für $v \in H^1(\Omega) \cap H^2(\mathcal{T}_h)$ mit $\nabla v \in H(\mathrm{div};\Omega)$ und jede innere Kante $S \in \mathcal{S}_h$

$$[\![\nabla v \cdot n_S]\!]|_S = 0$$

gilt, wobei n_S konstant auf eine Umgebung von S fortgesetzt wird.

Aufgabe 4 (Discontinuous Galerkin-Verfahren - Teil I, 10 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die Bilinearform $a_{dG} : H^2(\mathcal{T}_h) \times H^2(\mathcal{T}_h) \to \mathbb{R}$, die für $u, v \in H^2(\mathcal{T}_h)$ definiert ist durch

$$a_{dG}(u,v) := \int_\Omega \nabla_{\mathcal{T}} u \cdot \nabla_{\mathcal{T}} v \, \mathrm{d}x + \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \int_S \{\nabla u \cdot n_S\} [\![v]\!] \, \mathrm{d}s$$
$$+ \sigma \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \int_S \{\nabla v \cdot n_S\} [\![u]\!] \, \mathrm{d}s + \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \frac{\beta_S}{h_S^\gamma} \int_S [\![u]\!] [\![v]\!] \, \mathrm{d}s,$$

auf $\mathcal{S}^{k,dG}(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{S}^{k,dG}(\mathcal{T}_h)$ in der Norm $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_{dG}$ beschränkt ist.

(ii) Beweisen Sie, dass a_{dG} symmetrisch ist genau dann, wenn $\sigma = 1$ ist.