Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen I

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Marijo Milicevic

Übungsblatt 13

Abgabe am **Montag, den 29.01.2018**

Aufgabe 1 (dG-Norm, 10 Punkte)
Zeigen Sie, dass eine Konstante $c > 0$ existiert mit

$$\|v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c |\!|\!| v_h |\!|\!|_{dG}$$

für alle $v_h \in \mathcal{S}^{1,dG}(\mathcal{T}_h)$, sofern das Poisson-Problem mit $\Gamma_D = \partial\Omega$ H^2-regulär ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung $\|v\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{q \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} \int_\Omega vq \,\mathrm{d}x / \|q\|_{L^2(\Omega)}$.

Aufgabe 2 (Inverse Abschätzung, 10 Punkte)
Sei $\mathcal{T}_h$ eine quasi-uniforme Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass für $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$, $T \in \mathcal{T}_h$ und $1 \leq p \leq r \leq \infty$

$$\|\nabla v_h\|_{L^p(T)} \leq Ch^{-1} \|v_h\|_{L^p(T)} \quad \text{und} \quad \|v_h\|_{L^r(\Omega)} \leq Ch^{2(1/r-1/p)} \|v_h\|_{L^p(\Omega)}$$

gilt.
Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel, welches zeigt, dass inverse Abschätzungen nur in endlich-dimensionalen Funktionenräumen gelten können.

Aufgabe 3 (Inhomogene Dirichlet-Randdaten, 10 Punkte)
Leiten Sie für das Poisson-Problem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = u_D \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit $u_D = \widetilde{u}_D|_{\partial\Omega}$ und $\widetilde{u}_D \in H^1(\Omega) \setminus H^2(\Omega)$, ein dG-Verfahren her, indem Sie obiges Problem für $s > 3/2$ in das Variationsproblem

$$\widetilde{a}_{dG}(u, v) = b_{dG}(v) \quad \forall\, v \in H^s(\mathcal{T}_h),$$

überführen.

Aufgabe 4 (Lamé-Konstanten, 10 Punkte)
Konstruieren Sie mit dem Ansatz $u(x) = Ax$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Diagonalmatrix ist, eine Lösung der Navier-Lamé-Gleichungen im Zylinder $\Omega = (-L/2, L/2) \times B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ mit $\Gamma_D = \emptyset$,

$\Gamma_N = \partial\Omega$, $f = 0$ und

$$g(x) = \begin{cases} \pm e_1, & x_1 = \pm L/2, \\ 0, & -L/2 < x_1 < L/2, \end{cases}$$

für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_N$. Bestimmen Sie das Verhältnis von Streckung und radialer Stauchung und skizzieren Sie die Lösung für verschiedene Lamé-Konstanten (λ, μ).

Hinweis: Die Navier-Lamé-Gleichungen sind gegeben durch $-\operatorname{div} \mathbb{C}\varepsilon(u) = f$ in Ω, $u|_{\Gamma_D} = u_D$ und $(\mathbb{C}\varepsilon(u))n|_{\Gamma_N} = g$. Hierbei sind $\varepsilon(u) = ((\nabla u) + (\nabla u)^T)/2$ und $\mathbb{C}B = \lambda \operatorname{Spur}(B) I + 2\mu B$ für $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\lambda, \mu > 0$.