Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen I

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Marijo Milicevic

Übungsblatt 2

Abgabe am **Montag, den 30.10.2017**

Aufgabe 1 (Inf-Sup-Bedingung, 10 Punkte)
Seien $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(*i*) M ist invertierbar genau dann, wenn ein $\beta > 0$ mit $\inf_{\mu\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \sup_{\nu\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\mu^T M\nu}{|\mu||\nu|} \geq \beta$ existiert.

(*ii*) B ist surjektiv genau dann, wenn ein $\beta > 0$ mit $\inf_{\mu\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\}} \sup_{\nu\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\mu^T B\nu}{|\mu||\nu|} \geq \beta$ existiert.

Aufgabe 2 (Invertierbarkeit auf dem Kern, 10 Punkte)
Konstruieren Sie nicht-triviale Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $B \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ so, dass A invertierbar ist und B surjektiv ist, aber $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ nicht invertierbar ist. Geben Sie $K = \ker(B)$ an und überprüfen Sie die Invertierbarkeit von A_{KK}.

Aufgabe 3 (Eindeutige Lösbarkeit von gestörten Sattelpunktproblemen, 10 Punkte)
Es seien die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ gegeben. Wir betrachten die zusammengesetzte Matrix $S = \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{bmatrix}$.

(*i*) Seien A und C positiv-definit. Zeigen Sie, dass S invertierbar ist.

(*ii*) Seien A und C positiv-semidefinit und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ surjektiv. Außerdem sei A symmetrisch. Weiter sei für $K = \ker(B)$ die Abbildung $A|_K : K \to K$ bijektiv. Zeigen Sie, dass S invertierbar ist.

Aufgabe 4 (Operatornorm, 10 Punkte)

(*i*) Wir betrachten $V = \mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|_V$ und der dualen Norm $\|\cdot\|_{V'}$. Zeigen Sie, dass

$$\|v\|_V = \sup_{w\in V\setminus\{0\}} \frac{w^T v}{\|w\|_{V'}} \qquad \text{für alle } v \in V.$$

(*ii*) Zeigen Sie, dass mit der Notation und dem Kontext in der Vorlesung $\|(B_I^T)^{-1}\|_{V'Q} = \|B_I^{-1}\|_{Q'V}$ gilt.