Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen I

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Marijo Milicevic

Übungsblatt 3

Abgabe am **Montag, den 06.11.2017**

Aufgabe 1 (Sattelpunktprobleme, 10 Punkte)
Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Es bezeichne $\pi : \mathbb{R}^n \to \ker B$ die orthogonale Projektion auf den linearen Unterraum $\ker B \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Matrix $S := \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.

(ii) Die Abbildung $\pi \circ A : \ker B \to \ker B$ ist ein Isomorphismus und es existiert ein $k > 0$, sodass $\|B^T\lambda\| \geq k\|\lambda\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^m$.

Aufgabe 2 (Satz vom abgeschlossenen Bild, 10 Punkte)

(i) Sei $N \in \mathbb{N}$. Wir definieren den linearen Operator $A_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ durch $x = (x_1, \dots, x_N) \mapsto A_N x := (x_1, x_2/2, x_3/3, \dots, x_N/N)$. Bestimmen Sie die Konditionszahl von A_N.

(ii) Zeigen Sie, dass der Operator $A : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, $x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto Ax := (x_1, x_2/2, \dots)$ linear, beschränkt und injektiv ist.

(iii) Seien X und Y Banachräume. Zeigen Sie, dass das Bild eines beschränkten, linearen Operators $L : X \to Y$ im Allgemeinen nicht abgeschlossen ist.

(iv) Erfüllt A eine Inf-Sup-Bedingung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (Partielle Integration für Vektorfelder, 10 Punkte)
Seien $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitzgebiet sowie $u \in H^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Wir definieren den symmetrischen Gradienten von u durch $\epsilon(u) := \frac{1}{2}[\nabla u + (\nabla u)^T]$. Zeigen Sie die folgende Version der partiellen Integration: Für alle $v \in H^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int_\Omega v \cdot \operatorname{div} \epsilon(u) \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \epsilon(v) : \epsilon(u) \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v \cdot (\epsilon(u) n) \, \mathrm{d}x.$$

Hierbei ist $A : B := \mathrm{Spur}(A^T B) = \sum_{j,k=1}^{d} a_{jk} b_{jk}$ und n die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$. Der Vektor $\operatorname{div} \epsilon(u)$ enthält als j-ten Eintrag die Divergenz der j-ten Zeile der Matrix $\epsilon(u)$, $j = 1, \dots, d$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (Stokessche Gleichung, 10 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ein Lipschitzgebiet. Wir sagen, dass die Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und $p : \Omega \to \mathbb{R}$ der Stokesschen Gleichung genügen, falls

$$-\Delta u + \nabla p = f \quad \text{und} \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

unter der Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$.

a) Zeigen Sie: Das Paar $(u, p) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ löst die Stokessche Gleichung genau dann, wenn

$$\begin{aligned} (\nabla u, \nabla v) - (p, \operatorname{div} v) &= (f, v), \\ (\operatorname{div} u, q) &= 0, \end{aligned}$$

für alle $v \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ und alle $q \in C_0^0(\Omega; \mathbb{R})$. Hierbei bezeichne $(\cdot, \cdot)$ das L^2-Skalarprodukt. Kann man die Eindeutigkeit von Lösungen erwarten?

b) Zeigen Sie, dass $M_0 := \{u \in H_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d) : \operatorname{div} u = 0\}$ eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge von $H^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ ist. Folgern Sie daraus die Existenz eines Minimierers $u \in M_0$ des Energiefunktionals $E : M_0 \to \mathbb{R}$,

$$E(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f \cdot v \, \mathrm{d}x.$$

c) Formulieren Sie die Stokessche Gleichung als Minimierungsproblem unter geeigneten Nebenbedingungen.