Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen I

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Marijo Milicevic

Übungsblatt 4

Abgabe am **Montag, den 13.11.2017**

Aufgabe 1 (Fehlerabschätzung, 10 Punkte)
Sei $T \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1,2,3$, ein abgeschlossenes Simplex mit Durchmesser h_T. Für $v \in C^{0,\alpha}(T)$ sei $|v|_{C^{0,\alpha}(T)} := \sup_{x \neq y} |v(y) - v(x)|/|y-x|^\alpha$. Zeigen Sie mit Hilfe der Taylor-Approximation, dass für den nodalen Interpolationsoperator $\mathcal{I}$ und $0 < \alpha < 1$

$$\|u - \mathcal{I}u\|_{C^0(T)} \leq c h_T^{1+\alpha} |\nabla(u - \mathcal{I}u)|_{C^{0,\alpha}(T)}$$

für alle $u \in C^{1,\alpha}(T)$ gilt.

Aufgabe 2 (Gemischte Formulierung der Poisson-Gleichung, 10 Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitzgebiet. Zeigen Sie, dass für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ folgende Gleichheit gilt:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x = \sup_{q \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \int_\Omega q \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega |q|^2 \,\mathrm{d}x.$$

b) Sei $f \in L^2(\Omega)$. Leiten Sie die Optimalitätsbedingungen für das Sattelpunktproblem

$$\inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \sup_{q \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \int_\Omega q \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega |q|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x$$

her und erklären Sie, zu welchem Problem es assoziiert ist.
Hinweis: Bestimmen Sie für $L(v,q) := \int_\Omega q \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega |q|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x$ die Ausdrücke $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} L(v+tw,q)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} L(v, q+t\varphi)$.

Aufgabe 3 (Verallgemeinertes Lax-Milgram-Lemma, 10 Punkte)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $f \in L^2(\Omega)$.

a) Zeigen Sie, dass $p \in H_0^1(\Omega)$ genau dann die schwache Lösung des Poisson-Problems

$$\begin{aligned} -\Delta p &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ p &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

ist, wenn für das Paar $(u, p) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) \times H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega u \cdot v \, \mathrm{d}x - \int_\Omega v \cdot \nabla p \, \mathrm{d}x &= 0, \\ \int_\Omega u \cdot \nabla q \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega f q \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

für alle $(v, q) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) \times H_0^1(\Omega)$ gilt.

b) Wir definieren für $(u, p), (v, q) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) \times H_0^1(\Omega)$

$$\Gamma((u,p),(v,q)) := \int_\Omega u \cdot v \, \mathrm{d}x - \int_\Omega v \cdot \nabla p \, \mathrm{d}x - \int_\Omega u \cdot \nabla q \, \mathrm{d}x.$$

Beweisen Sie auf direktem Wege, d.h. ohne Verwendung von Brezzis Splitting Theorem, dass Γ eine Inf-Sup-Bedingung erfüllt sowie beschränkt und nicht degeneriert ist. Folgern Sie, dass die Bedingungen des verallgemeinerten Lax-Milgram-Lemmas erfüllt sind.

Hinweis: Betrachten Sie das Paar $(v, q) = (u - \nabla p, -2p)$.

Aufgabe 4 (Inf-Sup-Bedingung - Teil II, 10 Punkte)

Sei $\ell^2(\mathbb{N})$ der Raum aller Folgen $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, für die $\sum_{i=1}^\infty x_i^2 < \infty$ gilt. Der Raum ist, versehen mit dem Skalarprodukt $(x, y) := \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$ für $x, y \in \ell^2(\mathbb{N})$, ein Hilbertraum. Bestimmen Sie, welche der Abbildungen $L_j : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, $j = 1, \ldots, 5$, eine Inf-Sup-Bedingung erfüllen und begründen Sie in jedem Fall Ihre Antwort:

$$\begin{aligned} x &\mapsto L_1 x := (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \ldots), \\ x &\mapsto L_2 x := (x_1, x_3, x_5, \ldots), \\ x &\mapsto L_3 x := (x_1 - x_2, x_3 - x_4, \ldots), \\ x &\mapsto L_4 x := (|x_1|, |x_2|, \ldots), \\ x &\mapsto L_5 x := (x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots). \end{aligned}$$

Berechnen Sie darüber hinaus die adjungierten Operatoren L_j', $j = 1, \ldots, 5$.