Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen I

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Marijo Milicevic

Übungsblatt 5

Abgabe am **Montag, den 20.11.2017**

Aufgabe 1 (Der Hilbertraum $H(\mathrm{div};\Omega)$, 10 Punkte)
Der Raum $H(\mathrm{div};\Omega)$ enthalte per Definition alle $u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$, für die ein $f \in L^2(\Omega)$ existiert mit

$$\int_\Omega f\phi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \cdot \nabla\phi \,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wir schreiben dann $\mathrm{div}\, u := f$.

(*i*) Zeigen Sie, dass die Abbildung $(\cdot,\cdot)_{H(\mathrm{div};\Omega)} : H(\mathrm{div};\Omega) \times H(\mathrm{div};\Omega) \to \mathbb{R}$, $(u,v)_{H(\mathrm{div};\Omega)} := (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\mathrm{div}\, u, \mathrm{div}\, v)_{L^2(\Omega)}$, ein Skalarprodukt auf $H(\mathrm{div};\Omega)$ definiert, und beweisen Sie, dass $\big(H(\mathrm{div};\Omega), (\cdot,\cdot)_{H(\mathrm{div};\Omega)}\big)$ ein Hilbertraum ist.

(*ii*) Für $u \in H(\mathrm{div};\Omega)$ ist die Spur $u \cdot n$ auf $\partial\Omega$, motiviert durch den Divergenzsatz, definiert als

$$\langle u \cdot n, v\rangle := \int_\Omega \mathrm{div}(uv)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega v \,\mathrm{div}\, u \,\mathrm{d}x$$

für $v \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass für $u \in H(\mathrm{div};\Omega)$ die Abbildung $u \cdot n : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ linear und stetig ist. Folgern Sie, dass der Raum $H_N(\mathrm{div};\Omega) := \{u \in H(\mathrm{div};\Omega) : u\cdot n = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ ein abgeschlossener Unterraum von $H(\mathrm{div};\Omega)$ ist.
Zeigen Sie außerdem, dass im Fall $u \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^d)$ die oben definierte Abbildung $u \cdot n$ mit der Normalenkomponente von u auf $\partial\Omega$ übereinstimmt.

Aufgabe 2 (Céa-Lemma, 10 Punkte)
Seien V ein Hilbertraum und $V_h \subset V$ ein Unterraum. Seien $\ell : V \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, koerzive und stetige Bilinearform, d.h. es existieren $\alpha, C_a > 0$ mit $\alpha\|v\|_V^2 \le a(v,v)$ für alle $v \in V$ und $a(u,v) \le C_a\|u\|_V\|v\|_V$ für alle $u,v \in V$. Weiter seien $u \in V$ und $u_h \in V_h$ so, dass $a(u,v) = \ell(v)$ für alle $v \in V$ und $a(u_h,v_h) = \ell(v_h)$ für alle $v_h \in V_h$. Zeigen Sie, dass

$$\|u - u_h\|_V \le \sqrt{C_a/\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Aufgabe 3 (Verallgemeinertes Lax-Milgram-Lemma, 10 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir definieren $\Gamma(v,w) := \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x$ für $v,w \in H_0^1(\Omega)$. Beweisen Sie, dass Γ folgende Eigenschaften hat:

Bitte wenden!

(*i*) Es existiert ein $c > 0$ mit $\Gamma(v, w) \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega)}$.

(*ii*) Es exisitert ein $\alpha > 0$ mit $\inf\limits_{v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \sup\limits_{w \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\Gamma(v,w)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega)}} \geq \alpha$.

(*iii*) Für alle $w \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ existiert ein $v \in H_0^1(\Omega)$ mit $\Gamma(v, w) \neq 0$.

Aufgabe 4 (Koerzivität auf Unterräumen, 10 Punkte)

Seien V ein Hilbertraum und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ stetig, symmetrisch und positiv-semidefinit sowie $K \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum. Für jedes $\ell \in K'$ existiere ein eindeutiges $u \in K$ mit $a(u, v) = \ell(v)$ für alle $v \in K$ so, dass $\|u\|_V \leq c_K\|\ell\|_{K'}$.

(*i*) Zeigen Sie, dass a koerziv ist auf K.

(*ii*) Zeigen Sie, dass der Operator

$$A : K \to K', \quad \langle w, A(v)\rangle := a(v, w) \quad \text{für alle } v, w \in K$$

wohldefiniert und ein Isomorphismus ist.