Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen I

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Marijo Milicevic

Übungsblatt 6

Abgabe am **Montag, den 27.11.2017**

Aufgabe 1 (Der Spuroperator für Funktionen in $H(\mathrm{div};\Omega)$, 10 Punkte)
Es bezeichne $H^{1/2}(\partial\Omega)$ das Bild von $H^1(\Omega)$ unter dem Spuroperator, $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ den zugehörigen Dualraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die duale Paarung. Die Funktion $u \in H^1(\Omega)$ sei Lösung des Problems

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x = \langle g, v\rangle \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Setze $p = \nabla u$.

(*i*) Zeigen Sie, dass $p \in H(\mathrm{div};\Omega)$.

(*ii*) Zeigen Sie, dass der Spuroperator $\gamma : H(\mathrm{div};\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$, $p \mapsto \langle p\cdot n, \cdot\rangle$ surjektiv ist.

Aufgabe 2 (Konforme Approximation, 10 Punkte)
Es gelten die Babuška-Brezzi-Bedingungen und $(u,p) \in V \times Q$ bezeichne die Lösung des kontinuierlichen Sattelpunktproblems, während $(u_h,p_h) \in V_h \times Q_h$ die Lösung des diskreten Sattelpunktproblems sei. Zeigen Sie, dass im Fall $K_h \subset \ker B$ für alle $h > 0$ ein $C > 0$ existiert mit $\|u-u_h\|_V \le C \inf\limits_{v_h\in K_h} \|u-u_h-v_h\|_V$ und geben Sie ein Beispiel für eine konforme Methode an.

Aufgabe 3 (Surjektivität von div, 10 Punkte)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ konvex mit polygonalem Rand und $\mathcal{T}_h$ eine reguläre Triangulierung von Ω. Seien $\mathcal{RT}^0(\mathcal{T}_h) \subset H(\mathrm{div};\Omega)$ der Raviart-Thomas Finite-Elemente-Raum und $\mathcal{L}^0(\mathcal{T}_h) \subset L^2(\Omega)$ der Raum der auf Ω bezüglich $\mathcal{T}_h$ stückweise konstanten Funktionen. Zeigen Sie, dass für jedes $f_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}_h)$ ein $q_h \in \mathcal{RT}^0(\mathcal{T}_h)$ existiert mit $\operatorname{div} q_h = f_h$.

Hinweis: Verwenden Sie die H^2-Regularität des Poisson-Problems, den Divergenzsatz und den in der Vorlesung vorgestellten Interpolationsoperator für das Raviart-Thomas-Element.

Aufgabe 4 (Raviart-Thomas-Basis, 10 Punkte)
Sei $T \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1,2,3$, ein Simplex. Sei $S \subset \partial T$ eine Seite von T mit äußerer Einheitsnormalen n_S und sei $z \in T$ der Knoten von T gegenüber von S. Zeigen Sie, dass

$$d!|T| = |S|(z - x_S)\cdot n_S$$

für jeden beliebigen Punkt $x_S \in S$.