Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen I

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Marijo Milicevic

Übungsblatt 7

Abgabe am **Montag, den 04.12.2017**

Aufgabe 1 (Approximation von Funktionen in $H(\mathrm{div};\Omega)$, 10 Punkte)
Sei $u \in H(\mathrm{div};\Omega)$. Zeigen Sie, dass eine Folge $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset C^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{R}^d)$ existiert mit

$$\|u - u_\varepsilon\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leq c_\varepsilon, \qquad \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c\varepsilon^{-1}$$

und $c_\varepsilon \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.

Aufgabe 2 (Nicht-Integrierbarkeit der Spur in $H(\mathrm{div};\Omega)$, 10 Punkte)
Seien $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, $E = (0,1) \times \{0\}$ und $\sigma_\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{[-x_2,x_1]^T}{\epsilon+|x|^2}$.

a) Zeigen Sie, dass $\sigma_\epsilon \in H(\mathrm{div};\Omega)$ gilt und dass ein $\alpha_\epsilon \in \mathbb{R}$ existiert mit $\widetilde{\sigma}_\epsilon := \alpha_\epsilon\sigma_\epsilon \in H(\mathrm{div};\Omega)$ und $\|\widetilde{\sigma}_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

b) Zeigen Sie, dass $\|\widetilde{\sigma}_\epsilon \cdot n\|_{L^1(E)}$ unbeschränkt ist für $\epsilon \to 0$ und folgern Sie, dass der Spuroperator für Funktionen in $H(\mathrm{div};\Omega)$ als Operator nach $L^1(\partial\Omega)$ im Allgemeinen nicht wohldefiniert ist.

c) Warum ist es möglich, dem Integral $\int_{\partial\Omega} \sigma_\epsilon \cdot n \,\mathrm{d}s$ eine Bedeutung zu geben?

Aufgabe 3 (Spurungleichung, 10 Punkte)
Seien $T \subset \mathbb{R}^d$ ein d-Simplex und $\widehat{T} \subset \mathbb{R}^d$ ein Referenzsimplex. Seien S und $\widehat{S}$ Seiten von T bzw. $\widehat{T}$.

a) Zeigen Sie, dass eine Konstante $c > 0$ existiert so, dass für alle $\widehat{v} \in H^1(\widehat{T})$

$$\|\widehat{v}\|_{L^2(\widehat{S})} \leq c\|\widehat{v}\|_{H^1(\widehat{T})}$$

gilt. Von welchen Größen hängt c ab?

b) Beweisen Sie, dass eine von h_T unabhängige Konstante $c > 0$ existiert mit

$$\|v\|_{L^2(S)} \leq c\big(h_T^{-1/2}\|v\|_{L^2(T)} + h_T^{1/2}\|\nabla v\|_{L^2(T)}\big)$$

für alle $v \in H^1(T)$. Von welchen Größen hängt c ab?

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (Sobolev'sche Einbettungssätze, 10 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\mathcal{T}$ eine reguläre Triangulierung von Ω. Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}$ die Menge aller Kanten und mit $\mathcal{N}$ die Menge aller Knoten von $\mathcal{T}$. Überlegen Sie sich in jeder Teilaufgabe, unter welchen Bedingungen die in der jeweiligen Teilaufgabe definierte Abbildung wohldefiniert und in $(H^k(\Omega))'$ enthalten ist, und begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $\phi : H^k(\Omega) \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \int_T u(x)\,\mathrm{d}x$ für festes $T \in \mathcal{T}$.

(ii) $\phi : H^k(\Omega) \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \int_E u(s)\,\mathrm{d}s$ für festes $E \in \mathcal{E}$.

(iii) $\phi : H^k(\Omega) \to \mathbb{R}$, $u \mapsto u(z)$ für festes $z \in \mathcal{N}$.

(iv) $\phi : H^k(\Omega) \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \|u\|_{L^2(\Omega)}$.