Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen I

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Marijo Milicevic

Übungsblatt 8

Abgabe am **Montag, den 11.12.2017**

Aufgabe 1 (Kinematik, 10 Punkte)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und zusammenhängend und $T > 0$. Die zeitliche Evolution von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ werde durch die C^2-Funktion $\Phi : (0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $(t,x) \mapsto \Phi(t,x)$ beschrieben. Wir nehmen an, dass $\Phi(0,x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und setzen $\Omega_t := \Phi(t,\Omega)$ für $t \in (0,T)$. Weiter sei angenommen, dass die Jacobi-Determinante $J(t,x) := \det(D\Phi(t,x))$ positiv ist für alle $t \in (0,T)$ und für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

(i) Es bezeichne $v \in C^1((0,T)\times\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ das Geschwindigkeitsfeld des Flusses Φ, d.h. $\partial_t \Phi(t,x) = v(t,\Phi(t,x))$. Zeigen Sie, dass $\partial_t J(t,x) = (\operatorname{div} v)(t,\Phi(t,x)) J(t,x)$.
Hinweis: Verwenden Sie die Identität $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} \det(A(t)) = \det(A(t_0))\,\mathrm{Spur}\Big(A^{-1}(t_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} A(t)\Big)$ für $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $A(t_0)$ regulär.

(ii) Verwenden Sie die Identität aus Teilaufgabe (i), um $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Omega_t| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} 1 \,\mathrm{d}y = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} v(t,y)\,\mathrm{d}y$ zu zeigen.

Aufgabe 2 (Crouzeix-Raviart-Element, 10 Punkte)
Seien $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung des polygonal berandeten Lipschitzgebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{S}_h$ die Kanten der Triangulierung. Für $q_h \in \mathcal{S}^{1,CR}(\mathcal{T}_h)$ und eine innere Kante $S \in \mathcal{S}_h$ sei der Sprung $[\![q_h]\!]_S$ von q_h entlang der Kante S definiert durch

$$[\![q_h(x)]\!]_S := \lim_{\epsilon \to 0}\big(q_h(x + \varepsilon n_S) - q_h(x - \varepsilon n_S)\big)$$

für jedes x im Inneren der Kante S. Hierbei sei n_S eine Einheitsnormale an S.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\int_S [\![q_h]\!]_S \,\mathrm{d}s = 0$$

für alle $q_h \in \mathcal{S}^{1,CR}(\mathcal{T}_h)$ gilt.

(ii) Seien $u_h \in \mathcal{RT}^0(\mathcal{T}_h)$ und $q_h \in \mathcal{S}^{1,CR}(\mathcal{T}_h)$. Beweisen Sie die folgende Identität:

$$\int_\Omega q_h \operatorname{div} u_h \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u_h \cdot \nabla_{\mathcal{T}} q_h \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} q_h u_h \cdot n \,\mathrm{d}s.$$

Bitte wenden!

(iii) Zeigen Sie, dass eine eindeutige Lösung $u_h^{CR} \in \mathcal{S}^{1,CR}(\mathcal{T}_h)$ existiert mit $u_h^{CR}(x_S) = u_D(x_S)$ für alle Mittelpunkte x_S von Randkanten $S \in \mathcal{S}_h \cap \Gamma_D$ und mit

$$\int_\Omega \nabla_\mathcal{T} u_h^{CR} \cdot \nabla_\mathcal{T} v_h \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v_h \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} g v_h \,\mathrm{d}s$$

für alle $v_h \in \mathcal{S}_D^{1,CR}(\mathcal{T}_h)$.

Aufgabe 3 (Piola-Transformation, 10 Punkte)
Seien $T \subset \mathbb{R}^d$ ein d-Simplex, $\widehat{T} \subset \mathbb{R}^d$ ein Referenzsimplex, $\Phi_T : \widehat{T} \to T$ affin-linear mit $\Phi_T(\widehat{T}) = T$ und $v \in H^1(T)^2$. Wir definieren

$$\widehat{v} := \det(D\Phi_T)(D\Phi_T)^{-1}(v \circ \Phi_T).$$

Berechnen Sie die Divergenz von $\widehat{v}$ und zeigen Sie, dass für jede Seite $\widehat{S} \subset \partial\widehat{T}$ und $S = \Phi_T(\widehat{S})$

$$\int_S v \cdot n \,\mathrm{d}s = \int_{\widehat{S}} \widehat{v} \cdot \widehat{n} \,\mathrm{d}\widehat{s}$$

gilt.

Aufgabe 4 (Instabile Finite-Elemente-Paare, 10 Punkte)
Sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung von $\Omega = (0,1)^2$ mit Knoten $z_0 = (0,0)$, $z_1 = (1,0)$, $z_2 = (1,1)$, $z_3 = (0,1)$ und $z_4 = (1/2, 1/2)$. Konstruieren Sie eine Funktion $q_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}_h)$ mit $\int_\Omega q_h \,\mathrm{d}x = 0$ so, dass $\operatorname{div} v_h \neq q_h$ für alle $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)^2$. Folgern Sie, dass für dieses Paar von Finite-Elemente-Räumen kein $\beta > 0$ existiert mit

$$\inf_{q_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}_h)} \sup_{v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)^2} \frac{\int_\Omega q_h \operatorname{div} v_h \,\mathrm{d}x}{\|q_h\|_{L^2(\Omega)} \|v_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}} \geq \beta.$$