Theorie und Numerik partieller Differenzialgleichungen I

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Marijo Milicevic

Übungsblatt 9

Abgabe am **Montag, den 18.12.2017**

Aufgabe 1 (MINI-Element, 10 Punkte)
Sei $\mathcal{T}_h$ eine reguläre Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, in Dreiecke ($d = 2$) bzw. Tetraeder ($d = 3$).

(*i*) Für $u \in H_0^1(\Omega)$ sei $\mathcal{Q}_h u \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$ definiert durch

$$\int_\Omega \nabla \mathcal{Q}_h u \cdot \nabla v_h \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_h \,\mathrm{d}x$$

für alle $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{Q}_h u$ wohldefiniert ist und dass $\|\nabla \mathcal{Q}_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ gilt. Zeigen Sie außerdem, dass $\|u - \mathcal{Q}_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 h \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ gilt, falls das Poisson-Problem H^2-regulär ist.

(*ii*) Für jedes $T \in \mathcal{T}_h$ mit $T = \mathrm{conv}\{z_1, \ldots, z_{d+1}\}$ sei $b_T := \varphi_{z_1} \cdots \varphi_{z_{d+1}}$. Für $v \in L^2(\Omega)$ und $T \in \mathcal{T}_h$ sei $\lambda_T \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\int_T (\lambda_T b_T - v) \,\mathrm{d}x = 0$$

gilt. Wir definieren dann $\mathcal{P}_h v := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \lambda_T b_T$. Zeigen Sie, dass $\|\nabla \mathcal{P}_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 h_{\min}^{-1} \|v\|_{L^2(\Omega)}$ für alle $v \in L^2(\Omega)$ gilt, wobei $h_{\min} := \min_{T \in \mathcal{T}_h} \mathrm{diam}(T)$.

Hinweis: Beweisen Sie die Ungleichung $\|\nabla b_{\widehat{T}}\|_{L^2(\widehat{T})} \leq \widehat{c}_2 \|b_{\widehat{T}}\|_{L^2(\widehat{T})}$ für das Referenzelement $\widehat{T}$ und verwenden Sie dann ein Skalierungsargument.

(*iii*) Für $w \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ sei $I_F w := \mathcal{Q}_h w + \mathcal{P}_h (w - \mathcal{Q}_h w)$, wobei $\mathcal{P}_h$ und $\mathcal{Q}_h$ komponentenweise angewendet werden. Zeigen Sie, dass eine Konstante $c > 0$ existiert mit $\|\nabla I_F w\|_{L^2(\Omega)} \leq c(h_{\max}/h_{\min}) \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}$.

(*iv*) Zeigen Sie, dass für alle $w \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ und alle $q_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$

$$\int_\Omega q_h \,\mathrm{div}(w - I_F w) \,\mathrm{d}x = 0$$

gilt.

(*v*) Formulieren Sie hinreichende Bedingungen dafür, dass für die Räume $V_h = \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)^d \oplus \mathcal{B}_h(\mathcal{T}_h)^d$ und $Q_h = \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \cap L_0^2(\Omega)$ eine Inf-Sup-Bedingung unabhängig von h gilt.

Aufgabe 2 (Clément-Interpolant, 10 Punkte)
Seien $\Omega = (0,1)^2$ und $\mathcal{T}_h$ eine uniforme Triangulierung von Ω. Weiter sei für $z \in \mathcal{N}_h$ der Knotenpatch definiert als $\omega_z := \bigcup\{T \in \mathcal{T}_h : z \in T\}$. Für $v \in H_0^1(\Omega)$ definieren wir

$$v_z := \frac{1}{|\omega_z|}\int_{\omega_z} v \, \mathrm{d}x \quad \text{für alle } z \in \mathcal{N}_h \setminus \partial\Omega$$

und $v_z = 0$ für $z \in \mathcal{N}_h \cap \partial\Omega$. Wir setzen $\mathcal{J}v := \sum_{z\in\mathcal{N}_h} v_z\varphi_z$, wobei $(\varphi_z)_{z\in\mathcal{N}_h}$ die nodale Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ sei.

(*i*) Beweisen Sie, dass ein $c_1 > 0$ existiert mit $\|v - v_z\|_{L^2(\omega_z)} \le c_1 h\|\nabla v\|_{L^2(\omega_z)}$ für alle $z \in \mathcal{N}_h$.

(*ii*) Verwenden Sie die Identität $\sum_{z\in\mathcal{N}_h}\varphi_z = 1$, um zu zeigen, dass ein $c_2 > 0$ existiert mit $\|\nabla\mathcal{J}v\|_{L^2(\Omega)} \le c_2\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$.

(*iii*) Zeigen Sie, dass ein $c_3 > 0$ existiert mit $\|v - \mathcal{J}v\|_{L^2(\Omega)} \le c_3 h\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$.

Aufgabe 3 (Druckstabilisierung, 10 Punkte)
Es seien X ein Banachraum und $\Gamma : X\times X \to \mathbb{R}$ eine symmetrische und beschränkte Bilinearform, die eine Inf-Sup-Bedingung auf X erfülle. Sei $X_h \subset X$ ein endlich-dimensionaler Unterraum und mit einer beschränkten, symmetrischen und positiv semi-definiten Bilinearform $c_h : X_h\times X_h \to \mathbb{R}$ sei $\Gamma_h := \Gamma + c_h$. Die Bilinearform Γ_h erfülle eine von h unabhängige Inf-Sup-Bedingung auf X_h. Für ein gegebenes Funktional $\ell \in X'$ seien $x \in X$ bzw. $x_h \in X_h$ die eindeutigen Lösungen von

$$\Gamma(x,y) = \ell(y), \qquad \Gamma_h(x_h,y_h) = \ell(y_h)$$

für alle $y \in X$ bzw. für alle $y_h \in X_h$. Beweisen Sie folgende Fehlerabschätzung:

$$\|x - x_h\|_X \le c\big[\inf_{v_h\in X_h}\|x - v_h\|_X + c_h(v_h,v_h)^{\frac{1}{2}}\big].$$

Aufgabe 4 (Massenerhaltung, 10 Punkte)
Wir übernehmen die Notation von Aufgabe 1 auf Übungsblatt 8 für die zeitliche Evolution einer durch $\Omega_t \subset \mathbb{R}^d$, $t \in (0,T)$, beschriebenen Flüssigkeit. Es sei $\rho \in C^1((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ die Dichtefunktion des Mediums. Damit ist die Gesamtmasse m_{Ω_t} in Ω_t gegeben durch $m_{\Omega_t} = \int_{\Omega_t}\rho(t,y)\,\mathrm{d}y$. Weiter bezeichne $v \in C^1((0,T)\times\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ erneut das Geschwindigkeitsfeld des Flusses Φ, d.h. es gelte die Beziehung $\partial_t\Phi(t,x) = v(t,\Phi(t,x))$. Zeigen Sie, dass die Massenerhaltung, d.h. $m_{\Omega_0'} = m_{\Omega_t'}$ für $t \in (0,T)$ und für jede Teilmenge $\Omega_0' \subset \Omega_0$, auf die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t\rho(t,y) + \operatorname{div}(\rho v)(t,y) = 0 \quad \text{für } t \in (0,T) \text{ und } y \in \Omega_t$$

führt. Welche Form hat die Gleichung im Fall $\rho = \mathit{const}$ (insbesondere ist die Flüssigkeit dann inkompressibel)?