Praktikum zur Vorlesung

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I

Prof. Dr. S. Bartels
M. Sc. Zhangxian Wang

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2017/2018

Projekt 2

Abgabe am **Montag, den 13.11.2017, 10 Uhr**

Aufgabe 1

Lösungen des Neumann-Problems $-\Delta u = f$ in Ω, $\partial_n u = g$ auf $\Gamma_{\mathrm{N}} = \partial\Omega$ existieren nur für den Fall, dass die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} g \,\mathrm{d}s = 0$$

erfüllt ist, und sind eindeutig bis auf Konstanten. Betrachte verschiedene FE-Approximationen unter Verwendung der Normalisierungen

$$u_h(z_0) = 0, \quad \int_\Omega u_h \,\mathrm{d}x = 0,$$

und mithilfe der Minimierung des folgenden Funktionals:

$$\widetilde{E}_h(v_h) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_h|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f v_h \,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} g v_h \,\mathrm{d}s + \Big(\int_\Omega v_h \,\mathrm{d}x\Big)^2.$$

Implementiere die 3 Methoden, diskutiere Gemeinsamkeiten und Unterschiede und beschreibe die jeweiligen linearen Gleichungssysteme. Teste die Implementierung für den Fall $\Omega = (0,1)^2$, $f = 1$ und $g = -1/4$.

Aufgabe 2

Implementiere in zwei Dimensionen die P1-P0 Methode für die dual-gemischte Formulierung des Poisson-Problems mit $\Gamma_D = \partial\Omega$ und $u_D = 0$, d.h. das Problem:
Finde $(u,p) \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^2) \times L^2(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u \cdot v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega p \operatorname{div} v \,\mathrm{d}x &= 0,\\
\int_\Omega q \operatorname{div} u \,\mathrm{d}x &= -\int_\Omega f q \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

für alle $(v,q) \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^2) \times L^2(\Omega)$. Beurteile die Stabilität der Implementierung durch Testen verschiedener rechter Seiten f.